Tronc Commun

Série 2 : Etude de Fonctions

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{-10x}{1+x^2}$

1. Montrer que la fonction f est impaire
2. Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$
3. a) Soient a *et* b deux réels distincts , montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{10(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)}$

   b) En déduire la monotonie de la fonction f sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$
4. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Etudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Comparer les deux nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ *et* $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 3 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}$

   a) Déterminer D_h

   b) Montrer que la fonction h est paire

c) Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$
d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

8. Soit k la fonction définie par : $k(x)=|f(x)|$
   a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
   b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $k(x)=m$

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x)=3-\dfrac{6}{x+1}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}$
   a) Déterminer D_h
   b) Montrer que la fonction h est paire
   c) Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$
   d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
8. Soit k la fonction définie par : $k(x)=|f(x)|$
   a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
   b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $k(x)=m$

***

Corrigé de l'exercice 1 :

1. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

   ▷ $-x\in\mathbb{R}$

   ▷ $f(-x)=\dfrac{-10(-x)}{1+(-x)^2}=\dfrac{10x}{1+x^2}=-\dfrac{-10x}{1+x^2}=-f(x)$

   Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} -x\in\mathbb{R} \\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

   D'où f est une fonction impaire

2. Soit $x\in\mathbb{R}$:
   On a :
   $$f(x)-5=\frac{-10x}{1+x^2}-5=\frac{-10x-5-5x^2}{1+x^2}=\frac{-5\left(x^2+2x+1\right)}{1+x^2}=\frac{-5(x+1)^2}{1+x^2}$$
   Puisque $\dfrac{-5(x+1)^2}{1+x^2}\leq 0$ alors $f(x)\leq 5$

   De plus ,il est clair que $f(-1)=5$ (si non vous pouvez résoudre l'équation $f(x)=5$)pour

   Et par suite tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)\leq f(-1)$

   On conclut que $f(-1)=5$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

3. a) Soient a *et* b deux réels distincts, on a :
$$\begin{aligned}
\frac{f(a)-f(b)}{a-b} &= \frac{\frac{-10a}{1+a^2}-\frac{-10b}{1+b^2}}{a-b} \\
&= \frac{-10a\left(1+b^2\right)+10b\left(1+a^2\right)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)(a-b)} \\
&= \frac{10\left(-a-ab^2+b+ba^2\right)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)(a-b)} \\
&= \frac{10\left(-(a-b)+ab(a-b)\right)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)(a-b)} \\
&= \frac{10(a-b)(ab-1)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)(a-b)} \\
&= \frac{10(ab-1)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $a \quad et \quad b$ deux réels distincts , on a : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{10(ab-1)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$

b)

▷ étudions la monotonie de la fonction f sur $[0,1]$:

on a : $10>0$ et $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)>0$

et on a : $\begin{cases} 0 \le a \le 1 \\ 0 \le b \le 1 \end{cases}$

Donc $0 \le ab \le 1$

Donc $ab-1 \le 0$

Et puisque $a \ne b$ alors $ab-1<0$

D'où $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $[0,1]$

▷ étudions la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$:

on a : $10>0$ et $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)>0$

et on a : $\begin{cases} a \ge 1 \\ b \ge 1 \end{cases}$

Donc $ab \ge 1$

Donc $ab-1 \ge 0$

Et puisque $a \ne b$ alors $ab-1>0$

D'où $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$

Et par suite f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

4. On a f est une fonction impaire

▷ Puisque f est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors f l'est aussi sur $[-1,0]$

▷ Puisque f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors f l'est aussi sur $]-\infty,1]$

D'où, le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	↗	5	↘	-5	↗

Corrigé de l'exercice 2 :

1. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

   $D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2. Soient a et b deux éléments distincts de D_f , on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(b)}{a-b} &= \frac{\frac{a}{a-1}-\frac{b}{b-1}}{a-b}\\ &= \frac{\frac{ab-a-ab+b}{(a-1)(b-1)}}{a-b}\\ &= \frac{-(a-b)}{(a-1)(b-1)(a-b)}\\ &= \frac{-1}{(a-1)(b-1)}\end{aligned}$$

   Donc pour tout a et b deux éléments distincts de D_f : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{-1}{(a-1)(b-1)}$

   <u>Sur $]-\infty,1[$:</u>

   On a $a<1$ et $b<1$

   Donc $a-1<0$ et $b-1<0$

   Donc $\dfrac{-1}{(a-1)(b-1)}<0$

   Donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}<0$

   Et par suite f est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$

   <u>Sur $]1,+\infty[$:</u>

   On a $a>1$ et $b>1$

   Donc $a-1>0$ et $b-1>0$

   Donc $\dfrac{-1}{(a-1)(b-1)}<0$

   Donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}<0$

   Et par suite f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

3. Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

4. On a $\sqrt{2}\in]1,+\infty[$, $\sqrt{3}\in]1,+\infty[$ et $\sqrt{2}<\sqrt{3}$

   Puisque f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ alors $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt{3}\right)$

   Et par suite $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}>\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

Corrigé de l'exercice 3 :

1.

▷ $D_g=\left\{x\in\mathbb{R} / x-2\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} / x\neq 2\right\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

▷ Soit $x\in D_g$,on a:

$$1+\frac{2}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x}{x-2}=g\left(x\right)$$

Donc pour tout x de D_g : $g\left(x\right)=1+\dfrac{2}{x-2}$

2.

▷ $f\left(x\right)=x^2-2x$

On a : $a=1$ donc $a>0$

Et on a : $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2(1)}=1$ et $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)=f\left(1\right)=-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

▷ $g\left(x\right)=\dfrac{x}{x-2}$

On a : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$ donc $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} < 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

3.

$\triangleright$ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ équivaut à $x^2 - 2x = 0$

$f(x) = 0$ équivaut à $x = 0 \quad ou \quad x = 2$

Et par suite : $(C_f) \cap (Ox) = \{A(1,0); B(2,0)\}$

$\triangleright$ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $f(0)$:

On a : $f(0) = 0$

Donc $(C_f) \cap (Oy) = \{O(0,0)\}$

$\triangleright$ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses :

Résolvons dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation : $g(x) = 0$

$g(x) = 0$ équivaut à $\dfrac{x}{x-2} = 0$

$g(x) = 0$ équivaut à $x = 0$

Et par suite : $(C_g) \cap (Ox) = \{O(0,0)\}$

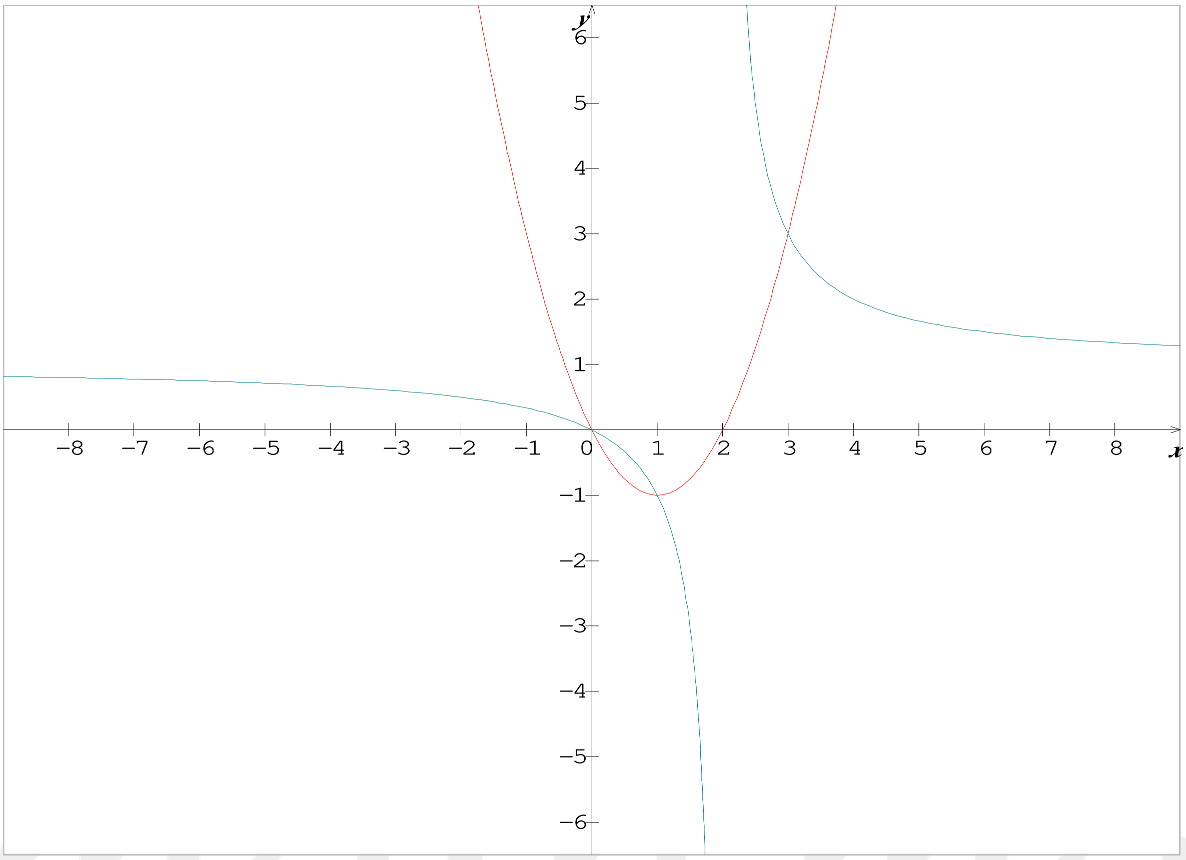
$\triangleright$ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $g(0)$:

On a : $g(0) = 0$

Donc $(C_g) \cap (Oy) = \{O(0,0)\}$

4.



5. Résolvons dans $\mathbb{R}-\{1\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ équivaut à $x^2-2x=\dfrac{x}{x-2}$

équivaut à $x(x-2)-\dfrac{x}{x-2}=0$

équivaut à $x\left[(x-2)-\dfrac{1}{x-2}\right]=0$

équivaut à $x\left[\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}\right]=0$

équivaut à $x=0 \quad ou \quad x=1 \quad ou \quad x=3$

et par suite $(C_f)\cap(C_g)=\{A(1,-1);O(0,0);D(3,3)\}$

6. graphiquement l'inéquation $f(x)\leq g(x)$équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f)est au-dessous de (C_g)

c-à-d $S=[0,1]\cup]2,3]$

7. $h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}$

a) $D_h=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|-2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\neq 2\}=\mathbb{R}-\{-2,2\}=]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

b) Soit $x\in D_h$, on a :

$\triangleright$ $-x\in D_h$ (car D_h est symétrique par rapport à 0)

$\triangleright$ $h(-x)=\dfrac{|-x|}{|-x|-2}=\dfrac{|x|}{|x|-2}=h(x)$

Donc pour tout x de D_h,on a : $\begin{cases} -x\in D_h \\ h(-x)=h(x) \end{cases}$

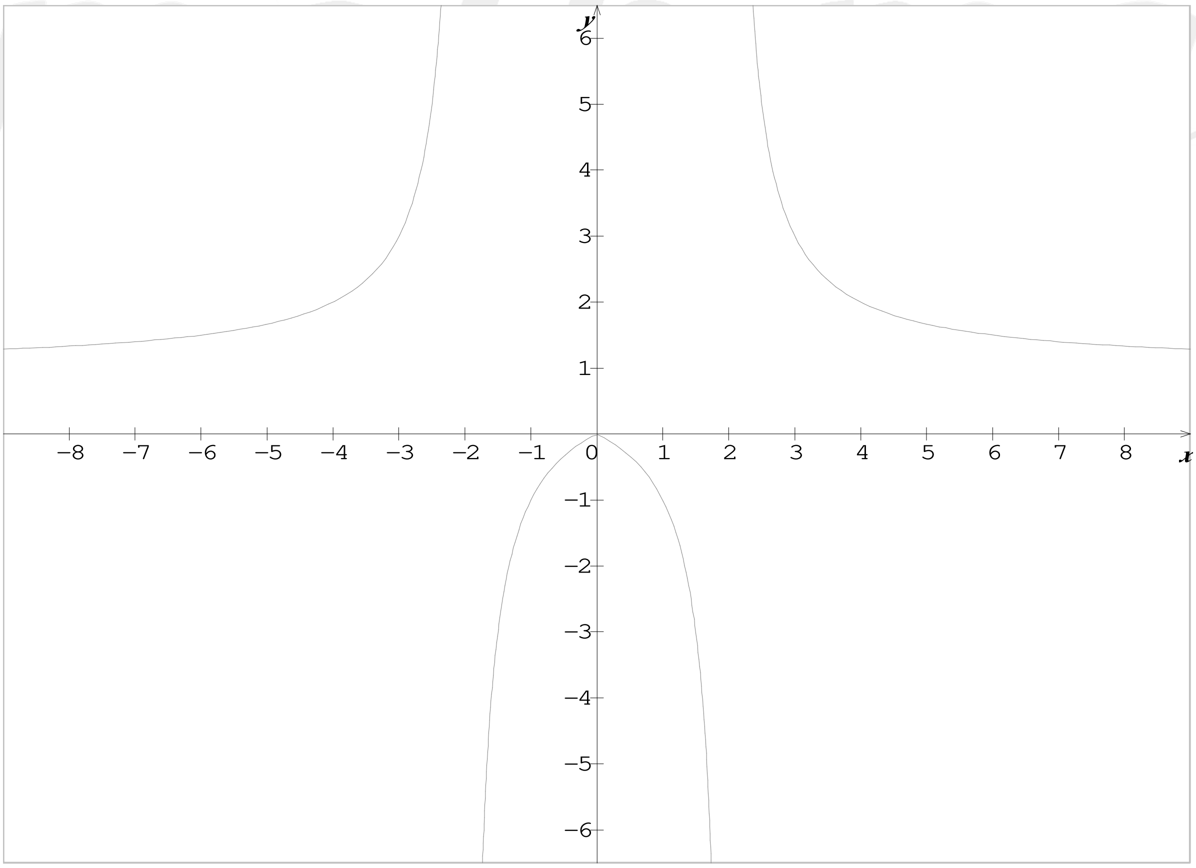
D'où la fonction h est paire

c) Soit $x\in\mathbb{R}^+-\{2\}$, on a :

$h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}=\dfrac{x}{x-2}=g(x)$ $\quad car \quad$ $\begin{cases} x\geq 0 \\ |x|=x \end{cases}$

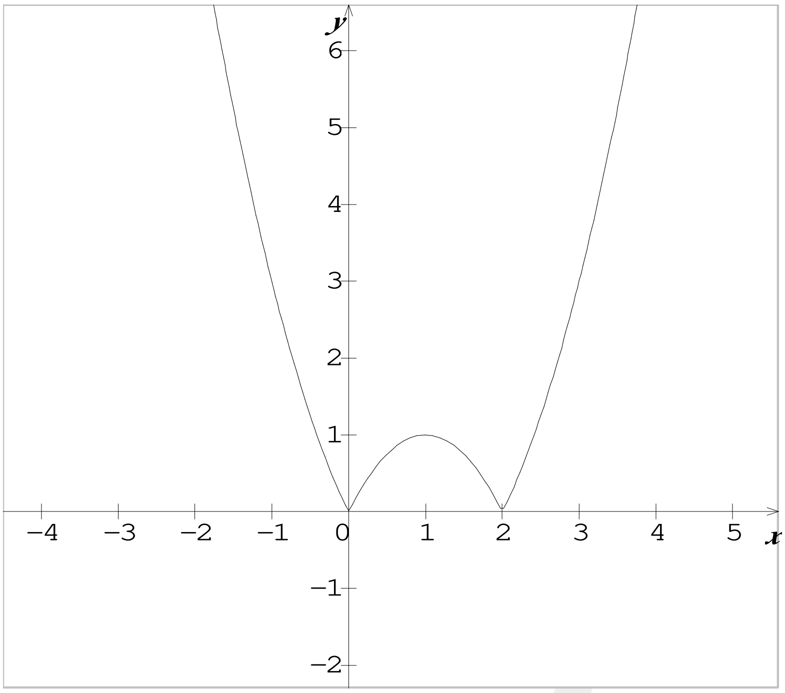
Donc $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

d)



8. $k(x)=|f(x)|$

a)



b) le nombre de solutions de l'équation $k(x)=m$ est le nombre de points d'intersection de (C_k) et l'axe $(\Delta_m): y=m$

- ▷ Si $m<0$: l'équation n'a pas de solutions
- ▷ Si $m=0$: l'équation admet deux solutions
- ▷ Si $0<m<1$: l'équation admet 4 solutions
- ▷ Si $m=1$: l'équation admet 3 solutions
- ▷ Si $m>1$: l'équation admet deux solutions

Corrigé de l'exercice 4 :

1.

▷ $D_g=\{x\in\mathbb{R} / x+1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} / x\neq -1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

▷ Soit $x\in D_g$,on a:

$$3-\frac{6}{x+1}=\frac{3(x+1)-6}{x+1}=\frac{3x+3-6}{x+1}=\frac{3x-3}{x+1}=g(x)$$

Donc pour tout x de D_g : $g(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$

2.

▷ $f(x)=x^2-2x+1$

On a : $a=1$ donc $a>0$

Et on a : $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2(1)}=1$ et $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)=f(1)=0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

▷ $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

On a : $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6$ donc $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$

3.

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0$ équivaut à $x^2-2x+1=0$

$f(x)=0$ équivaut à $x=1$

Et par suite : $(C_f)\cap(Ox)=\{A(1,0)\}$

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $f(0)$:

On a : $f(0)=1$

Donc $(C_f)\cap(Oy)=\{B(0,1)\}$

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses :

Résolvons dans $\mathbb{R}-\{-1\}$ l'équation : $g(x)=0$

$g(x)=0$ équivaut à $\dfrac{3x-3}{x+1}=0$

$g(x)=0$ équivaut à $x=1$

Et par suite : $(C_g)\cap(Ox)=\{A(1,0)\}$

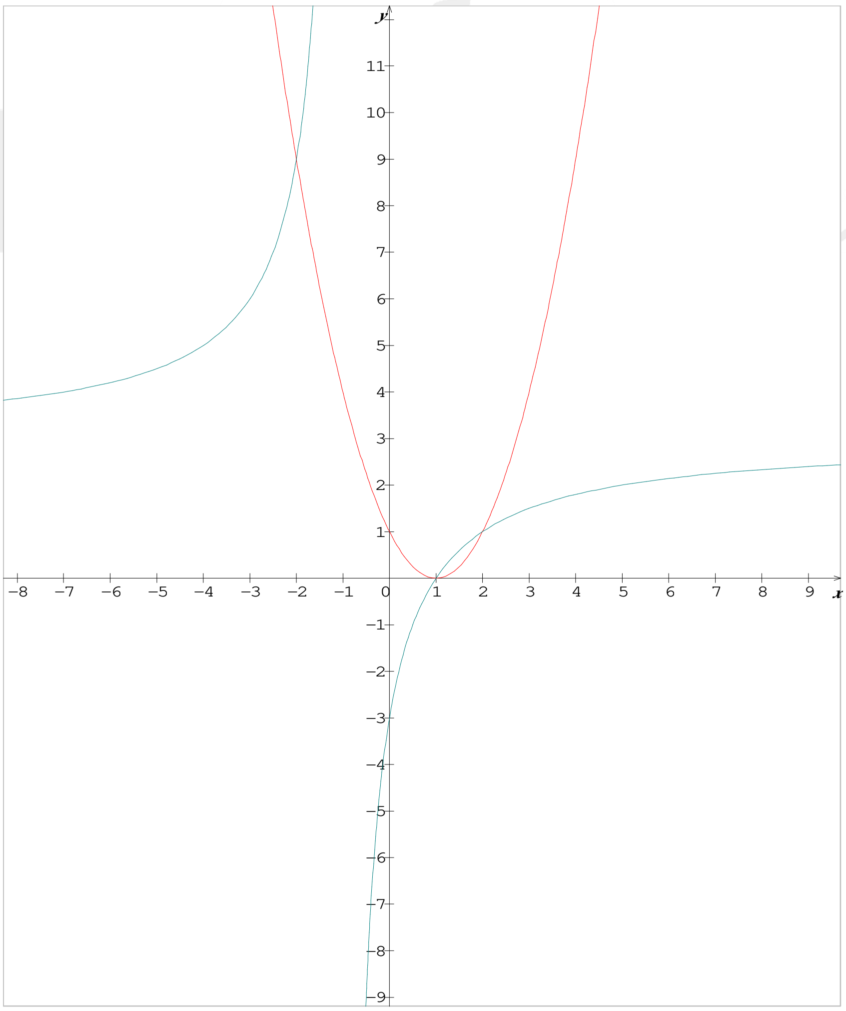
▷ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $g(0)$:

On a : $g(0)=-3$

Donc $(C_g)\cap(Oy)=\{C(0,-3)\}$

4.



5. Résolvons dans $\mathbb{R}-\{-1\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ équivaut à $x^2-2x+1=\dfrac{3x-3}{x+1}$

équivaut à $(x-1)^2-\dfrac{3(x-1)}{x+1}=0$

équivaut à $(x-1)\left[(x-1)-\dfrac{3}{x+1}\right]=0$

équivaut à $(x-1)\left[\dfrac{x^2-4}{x+1}\right]=0$

équivaut à $x=-2 \quad ou \quad x=1 \quad ou \quad x=2$

et par suite $(C_f)\cap(C_f)=\{A(1,0);E(-2,9);F(2,1)\}$

6. graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f)est au-dessus de (C_g)

c-à-d $S=]-\infty,-2]\cup]-1,1]\cup[2,+\infty[$

7. $h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) $D_h=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|+1\neq 0\}=\mathbb{R}$ (car pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $|x|+1\neq 0 \qquad (|x|\geq 0)$)

b) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$\triangleright$ $-x\in\mathbb{R}$

$\triangleright$ $h(-x)=\dfrac{3|-x|-3}{|-x|+1}=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}=h(x)$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$,on a : $\begin{cases} -x\in\mathbb{R} \\ h(-x)=h(x)\end{cases}$

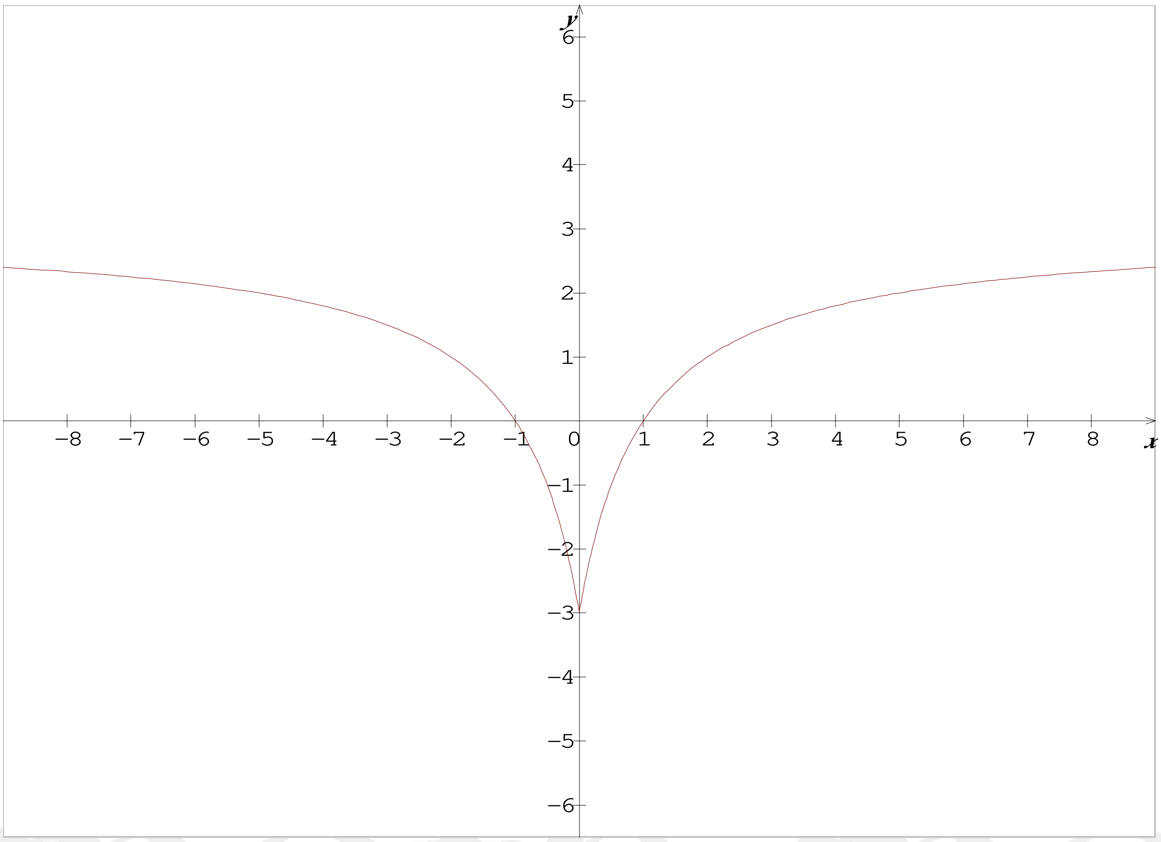
D'où la fonction h est paire

c) Soit $x\in\mathbb{R}^+$, on a :

$h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}=\dfrac{3x-3}{x+1}=g(x) \quad car \quad \begin{cases} x\geq 0 \\ |x|=x\end{cases}$

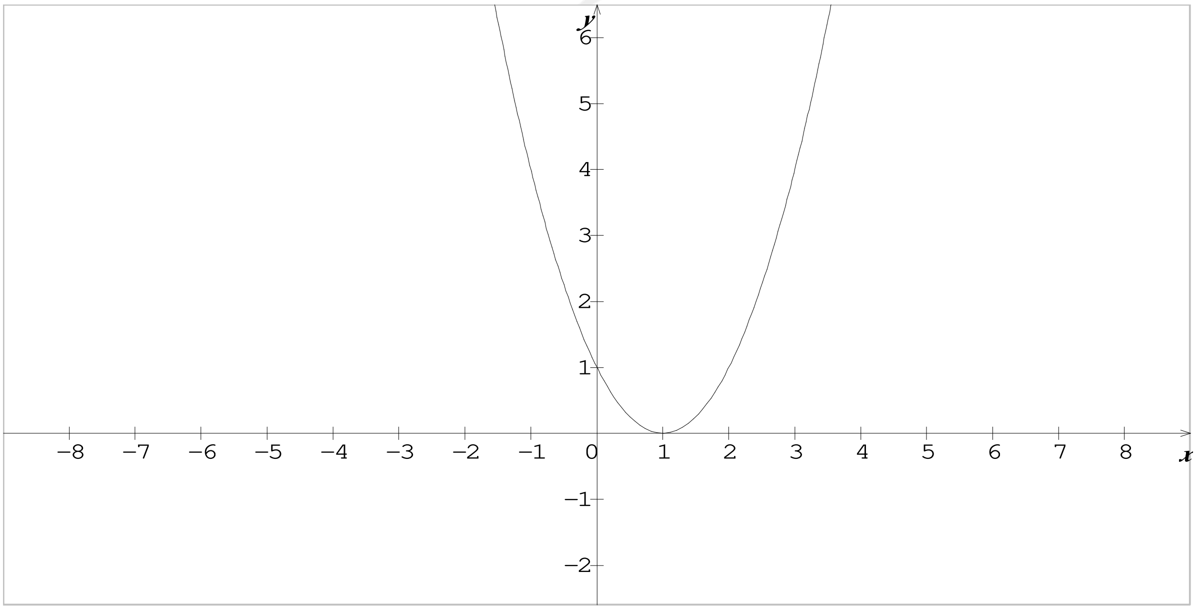
Donc $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

d)



8. $k(x)=|f(x)|$

a) On a $k(x)=|f(x)|=f(x)\quad car\quad (f(x)\geq 0)$ donc (C_k) et (C_f) sont confondues



b) le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de (C_k) et l'axe (Δ_m): $y = m$

- ▷ Si $m < 0$: l'équation n'a pas de solutions
- ▷ Si $m = 0$: l'équation admet une seule solution
- ▷ Si $m > 0$: l'équation admet deux solutions

つづく