

2<sup>ème</sup> année Sciences Expérimentales

## Série : Les Suites Numériques

**Exercice 1 :**

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{3^n}$

**Exercice 2 :**

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  dans les cas suivants :

1.  $u_n = \frac{5n^2 + 3}{2n - 7}$

2.  $u_n = \frac{7n + (-1)^n}{5n + 3}$

3.  $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + 3}$

4.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

5.  $u_n = \frac{3^n + 5^n}{3^n + 4 \times 5^n}$

**Exercice 3 :**

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1. Montrer que :  $u_n \geq 9$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
2. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante , puis déduire qu'elle est convergente.
3. On pose ,  $v_n = u_n - 9$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique
  - b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c- Déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 4 :**

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que :  $u_n > 2$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
2. On pose :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique
  - b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$

c- Déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 5 :

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que :  $u_n \geq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
2. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente
3. On pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique
  - b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c- Déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 6 :

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $I = [0,1]$  par :  $f(x) = \frac{4x + 3}{3x + 4}$

1. Etudier les variations de  $f$  sur  $I = [0,1]$
2. Montrer que  $f(I) \subset I$
3. Etudier la position de  $(C_f)$  avec l'axe  $(\Delta): y = x$  sur  $I = [0,1]$
4. Considérons la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a- Montrer que  $0 \leq u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
  - b- Etudier la monotonie de  $(u_n)$
  - c- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

\*\*\*

**Corrigé de l'exercice 1 :**

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$

$$\text{On a : } u_n = 1 - \frac{1}{3} \left( 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right)$$

$$\text{Et puisque : } 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{Alors : } u_n = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{On a : } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{Et par suite : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

**Corrigé de l'exercice 2 :**

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 3}{2n - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left( 5 + \frac{3}{n^2} \right)}{n \left( 2 - \frac{7}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{5 + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{7}{n}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n} = 0$$

2. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$

$$\text{On a : } \frac{7n-1}{5n+3} \leq u_n \leq \frac{7n+1}{5n+3} \quad (\text{car } -1 \leq (-1)^n \leq 1)$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n-1}{5n+3} = \frac{7}{5} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n+1}{5n+3} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{7}{5}$$

3. On a, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$  et  $n^2 + 3 > 0$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{-1}{n^2 + 3} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2 + 3}$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 3} = 0$$

Et par suite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$

Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Leftrightarrow 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + n^2} \leq \sqrt{k + n^2} \leq \sqrt{n + n^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n + n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{k + n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n + n^2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k + n^2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}$$

$$\text{Donc : } \frac{n}{\sqrt{n + n^2}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n + n^2}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{1 + n^2}} = 1$$

Alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n + 4 \times 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n \left( \frac{3^n}{5^n} + 1 \right)}{5^n \left( \frac{3^n}{5^n} + 4 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{3}{5} \right)^n + 1}{\left( \frac{3}{5} \right)^n + 4} = \frac{1}{4}$$

Car : ( puisque  $-1 < \frac{3}{5} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{5} \right)^n = 0$  )

### Corrigé de l'exercice 3 :

1. Montrons par récurrence que :  $u_n \geq 9$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

▷ Pour  $n = 0$  :

On a  $u_0 = 10$

Donc  $u_0 \geq 9$

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que :  $u_n \geq 9$

○ Montrons que :  $u_{n+1} \geq 9$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 9 &= \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19} - 9 \\ &= \frac{17}{19}u_n - \frac{153}{19} \\ &= \frac{17}{19}(u_n - 9) \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :  $u_n \geq 9$

Donc  $u_n - 9 \geq 0$

Donc  $\frac{17}{19}(u_n - 9) \geq 0$

Donc  $u_{n+1} \geq 9$

Et par suite  $u_{n+1} - 9 \geq 0$

▷ On conclut que :  $u_n \geq 9$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19} - u_n \\ &= \frac{-2}{19}u_n - \frac{18}{19} \\ &= \frac{-2}{19}(u_n - 9) \end{aligned}$$

Puisque  $u_n - 9 \geq 0$  alors  $\frac{-2}{19}(u_n - 9) \leq 0$

Donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

Et par suite  $(u_n)$  est décroissante .

- Puisque  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors  $(u_n)$  est convergente .

3.

a- Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 9 \\ &= \frac{17}{19}(u_n - 9) \\ &= \frac{17}{19}v_n \end{aligned}$$

Donc :  $v_{n+1} = \frac{17}{19}v_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

Et par suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{17}{19}$  et de premier terme

$$v_0 = u_0 - 9 = 10 - 9 = 1$$

b-

On a  $v_n = v_0 \left(\frac{17}{19}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

Donc  $v_n = \left(\frac{17}{19}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

c-

▷ On a :  $v_n = u_n - 9$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

Donc : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

Et par suite :  $u_n = \left(\frac{17}{19}\right)^n + 9$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

▷ Puisque  $-1 < \frac{17}{19} < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{17}{19}\right)^n = 0$

Et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 9$

### Corrigé de l'exercice 4 :

1.

▷ Pour  $n = 0$  :

On a  $u_0 = 3$

Donc  $u_0 > 2$

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que :  $u_n > 2$

○ Montrons que :  $u_{n+1} > 2$

On a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - 2 &= \frac{12 - 8u_n - 2}{4 - 3u_n} \\
 &= \frac{12 - 8u_n - 8 + 6u_n}{4 - 3u_n} \\
 &= \frac{4 - 2u_n}{4 - 3u_n} \\
 &= \frac{-2(u_n - 2)}{4 - 3u_n}
 \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :  $u_n > 2$

Donc  $u_n - 2 > 0$  et  $4 - 3u_n < -2 < 0$

Donc  $\frac{-2(u_n - 2)}{4 - 3u_n} > 0$

Donc  $u_{n+1} - 2 > 0$

Et par suite  $u_{n+1} > 2$

▷ On conclut que :  $u_n > 2$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

2. a- Soit  $n \in \mathbb{N}$  :

on a :

▷

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 2} \\
 &= \frac{\frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n}}{\frac{12 - 8u_n - 8 + 6u_n}{4 - 3u_n}} \\
 &= \frac{12 - 8u_n}{4 - 2u_n} \\
 &= \frac{-2(4u_n - 6)}{-2(u_n - 2)} \\
 &= \frac{4u_n - 6}{u_n - 2}
 \end{aligned}$$

▷

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{4u_n - 6}{u_n - 2} - \frac{u_n}{u_n - 2} \\
 &= \frac{3u_n - 6}{u_n - 2} \\
 &= \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Donc ,  $v_{n+1} - v_n = 3$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ Et par suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 3$  et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 2} = \frac{3}{3 - 2} = 3$$

b- On a :  $v_n = v_0 + nr$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ Donc :  $v_n = 3 + 3n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 

c-

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$ 

On a :

$$\begin{aligned}
 v_n = \frac{u_n}{u_n - 2} &\Leftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n \\
 &\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n \\
 &\Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = 2v_n \\
 &\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n}{v_n - 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{2(3 + 3n)}{(3 + 3n) - 1}$$

Et par suite :  $u_n = \frac{6 + 6n}{2 + 3n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 

$$\text{▷ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + 6n}{2 + 3n} = 2$$



## Corrigé de l'exercice 5 :

1. Montrons par récurrence que :  $u_n \geq 1$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

▷ Pour  $n = 0$  :

On a  $u_0 = 2$

Donc  $u_0 \geq 1$

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que :  $u_n \geq 1$

○ Montrons que :  $u_{n+1} \geq 1$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - 1 \\ &= \frac{7u_n + 2 - 2u_n - 7}{2u_n + 7} \\ &= \frac{5u_n - 5}{2u_n + 7} \\ &= \frac{5(u_n - 1)}{2u_n + 7} \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :  $u_n \geq 1$

Donc  $u_n - 1 \geq 0$  et  $2u_n + 7 \geq 9 > 0$

$$\text{Donc } \frac{5(u_n - 1)}{2u_n + 7} \geq 0$$

Donc  $u_{n+1} - 1 \geq 0$

Et par suite  $u_{n+1} \geq 1$

▷ On conclut que :  $u_n \geq 1$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

2.

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - u_n \\ &= \frac{7u_n + 2 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7} \\ &= \frac{2(1 - u_n^2)}{2u_n + 7} \end{aligned}$$

Puisque  $u_n \geq 1$  alors  $1 - u_n^2 \leq 0$  et  $2u_n + 7 > 0$

$$\text{Donc } \frac{2(1-u_n^2)}{2u_n+7} \leq 0$$

Et par suite  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

D'où  $(u_n)$  est décroissante

▷ Puisque  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors  $(u_n)$  est convergente

3.

a- Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\ &= \frac{\frac{7u_n+2}{2u_n+7}-1}{\frac{7u_n+2}{2u_n+7}+1} \\ &= \frac{7u_n+2-2u_n-7}{7u_n+2+2u_n+7} \\ &= \frac{5u_n-5}{9u_n+9} \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{u_n-1}{u_n+1} \\ &= \frac{5}{9} v_n \end{aligned}$$

Donc  $v_{n+1} = \frac{5}{9} v_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

Et par suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{5}{9}$  et du premier terme

$$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

b- On a  $v_n = v_0 \left(\frac{5}{9}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

$$\text{Donc } v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{9}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

c-

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned}
 v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\Leftrightarrow u_n v_n + v_n = u_n - 1 \\
 &\Leftrightarrow u_n - u_n v_n = v_n + 1 \\
 &\Leftrightarrow u_n (1 - v_n) = v_n + 1 \\
 &\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

$$\triangleright \text{ Puisque } -1 < \frac{5}{9} < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n} = 1$$

### Corrigé de l'exercice 6 :

1. On a  $f$  est dérivable sur  $I = [0,1]$

Soit  $x \in I = [0,1]$  :

$$\text{On a : } f'(x) = \left(\frac{4x+3}{3x+4}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{(3x+4)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{7}{(3x+4)^2} \text{ pour tout } x \text{ de } I = [0,1]$$

Puisque :  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I = [0,1]$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I = [0,1]$

2. On a :  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I = [0,1]$

$$\text{Donc } f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

Et par suite  $f(I) \subset I$

3. Soit  $x \in I = [0,1]$  :

On a :

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{4x+3}{3x+4} - x \\
 &= \frac{4x+3-3x^2-4x}{3x+4} \\
 &= \frac{3(1-x^2)}{3x+4}
 \end{aligned}$$

On a :  $x \in I = [0,1]$  donc  $1-x^2 \geq 0$  et  $3x+4 > 0$

$$\text{Donc } \frac{3(1-x^2)}{3x+4} \geq 0$$

Donc  $f(x) - x \geq 0$  pour tout  $x$  de  $I = [0,1]$

Et par suite  $(C_f)$  est au-dessus de  $(\Delta): y = x$  sur  $I = [0,1]$

4.

a- Montrons que :  $0 \leq u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

▷ Pour  $n = 0$  :

$$\text{On a : } u_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } 0 \leq u_0 \leq 1$$

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que  $0 \leq u_n \leq 1$

○ Montrons que  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

D'après l'hypothèse de récurrence , on a  $u_n \in I$

$$\text{Donc } f(u_n) \in f(I)$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \in f(I)$$

Et puisque  $f(I) \subset I$  , alors  $u_{n+1} \in I$

$$\text{D'où } 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

▷ On conclut que  $0 \leq u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

b- Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a  $f(x) - x \geq 0$  pour tout  $x$  de  $I = [0,1]$

Et comme  $u_n \in I$  , alors  $f(u_n) - u_n \geq 0$

Donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

D'où  $(u_n)$  est croissante

c- On a :  $u_0 = \frac{1}{2} \in I$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- ▷  $f$  est continue sur  $I = [0,1]$
- ▷  $f(I) \subset I$
- ▷ Puisque  $(u_n)$  est croissante et majorée alors elle est convergente  
Donc la limite de  $(u_n)$  est solution de l'équation  $f(x) = x$   
Et on a :  $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = 1$   
Puisque  $0 \leq u_n \leq 1$ , alors  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$   
D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

つづく

