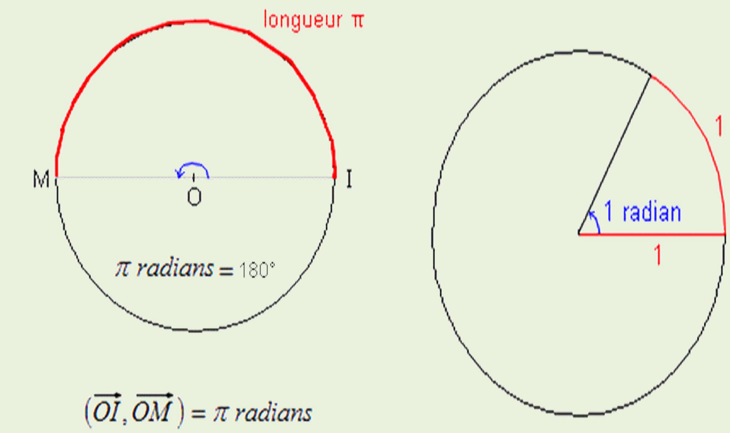
الحساب المثلثي

وحدات قياس الزوايا



- ❖ قياس زاوية مستقيمية هو $180°$ أما قياسها بالرديان فهو π (طول نصف دائرة شعاعها 1)
- ❖ توجد وحدة قياس أخرى لقياس الزوايا و هي الغراد و قياس زاوية مستقيمية بالغراد هو 200 غراد
- ❖ إذا كانت α و β و γ هي قياسات زاوية خندسية على التوالي بالدرجة و الرديان و الغراد فإن :

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$$

الدائرة المثلثية

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1
مزودة بنقطة أصل I و موجهة توجيها موجبا . التوجيه الموجب هو منحى الدوران حول الدائرة انطلاقا من I في المنحى المضاد لحركة عقارب الساعة

الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

لتكن $(\mathscr{C})$ دائرة مثلثية و O مركزها و I أصلها و α عددا حقيقيا

- ➢ في حالة $\alpha > 0$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C})$ بحيث القياس بالرديان لطول القوس $\widehat{IM}$ هو α عند التنقل على $(\mathscr{C})$ في المنحى الموجب
- ➢ في حالة $\alpha < 0$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C})$ بحيث القياس بالرديان لطول القوس $\widehat{IM}$ هو $-\alpha$ عند التنقل على $(\mathscr{C})$ في المنحى السالب

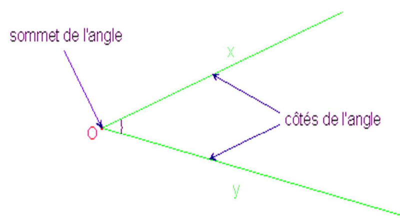
- في كلتا الحالتين α يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M على $(\mathscr{C})$ و نكتب $M(\alpha)$
- إذا كان $\alpha \in]-\pi,\pi]$ نقول إن α هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M و هو وحيد
- $\alpha+2k\pi$ هو أيضا أفصول منحني للنقطة M على $(\mathscr{C})$ أي $M(\alpha)$ و $M(\alpha+2k\pi)$ منطبقتان حيث $k \in \mathbb{Z}$

نقول أن x توافق y بترديد 2π و نكتب $x \equiv y\ [2\pi]$ إذا وفقط إذا كان $x = y + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

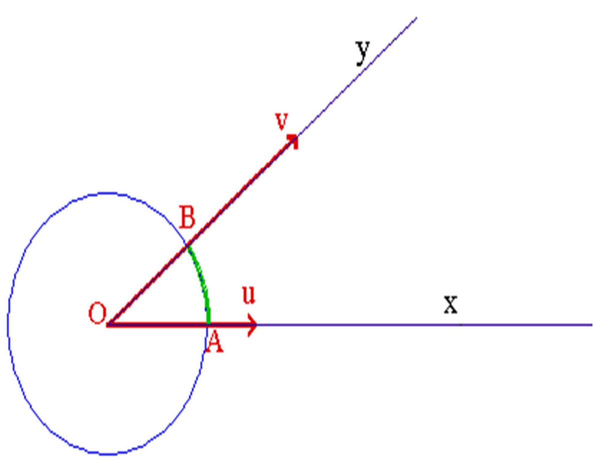
الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين لهما نفس الأصل

ليكن $([ox),[oy))$ نصفي مستقيمين لهما نفس الأصل O

- الزوج $([ox),[oy))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{ox,oy})$
- الزوج $([oy),[ox))$ يحدد زاوية موجهة لنفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{oy,ox})$



الزوج $(\widehat{ox,oy})$ يسمى زاوية موجهة لنصفي مستقيمين $[ox)$ و$[oy)$



الزوج $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ يسمى الزاوية الموجهة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

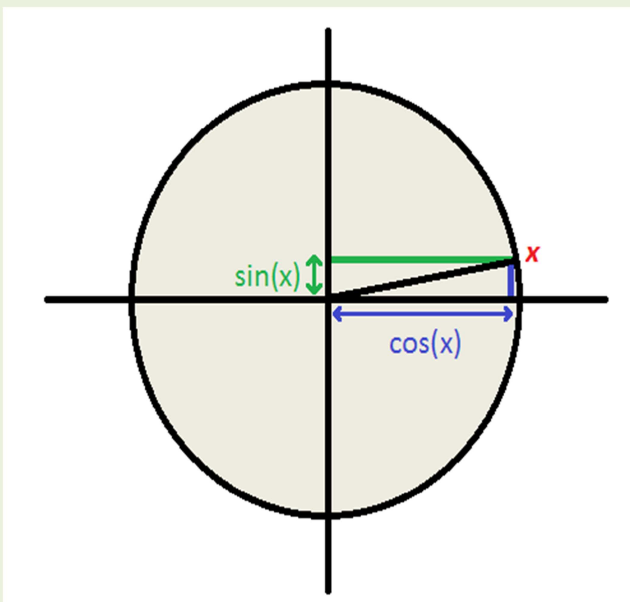
- $\left(\overline{\vec{u},\vec{u}}\right)=2k\pi$
- $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)=-\left(\overline{\vec{v},\vec{u}}\right)+2k\pi$
- علاقة شال $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\overline{\vec{u},\vec{w}}\right)+\left(\overline{\vec{w},\vec{v}}\right)+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

النسب المثلثية لعدد حقيقي

لتكن $(\mathscr{C})$ دائرة مثلثية أصلها I و J النقطة من $(\mathscr{C})$ بحيث $\frac{\pi}{2}$ هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$

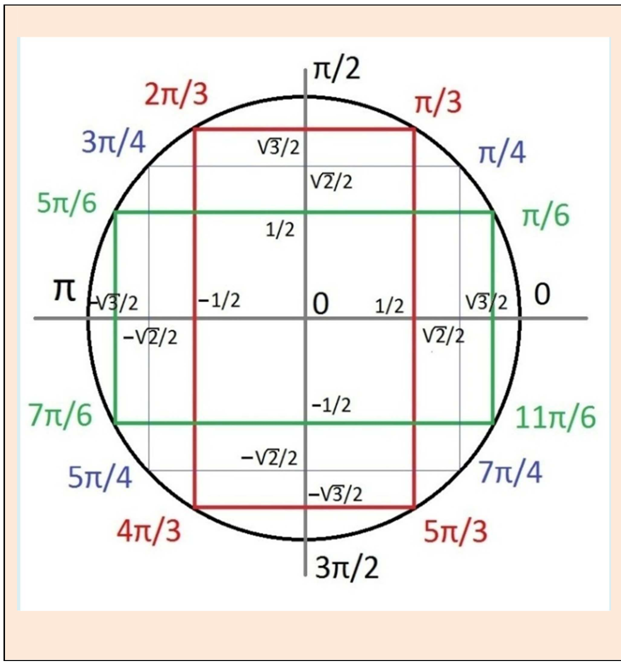
ليكن x أفصولا منحنيا لنقطة M على الدائرة $(\mathscr{C})$

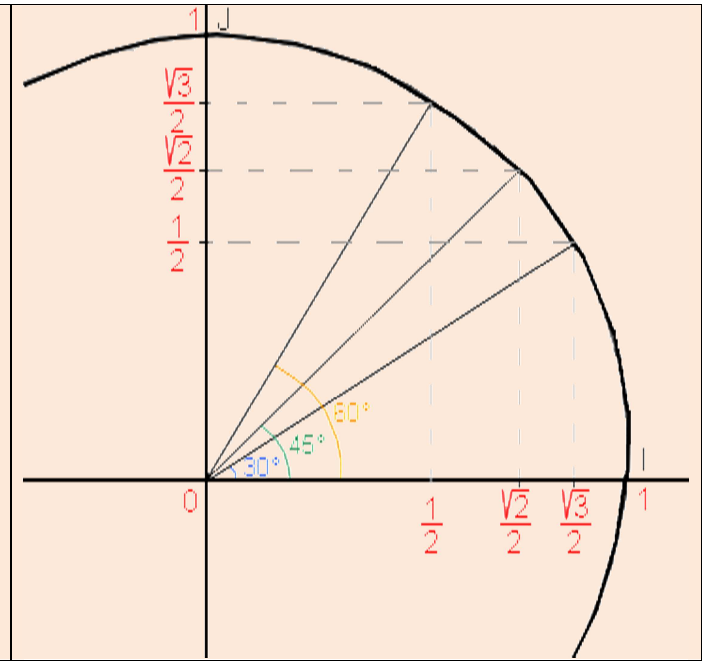
- أفصول النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب تمام x و نرمز له ب $\cos(x)$
- أرتوب النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب x و نرمز له ب $\sin(x)$



ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

العدد الحقيقي $\frac{\sin x}{\cos x}$ يسمى ظل x و نكتب $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$





	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

$$\begin{cases}\sin(-x)=-\sin(x)\\ \cos(-x)=\cos(x)\end{cases}$$

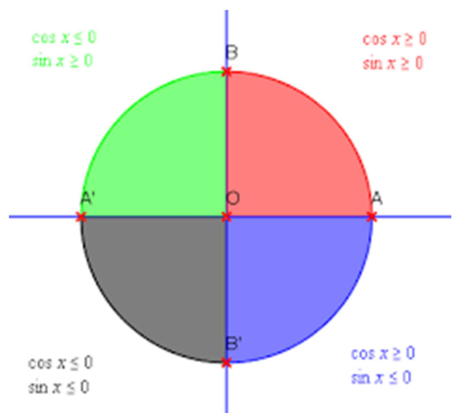
$$\tan(-x)=-\tan x$$

	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\sin(\ )$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\cos(\ )$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

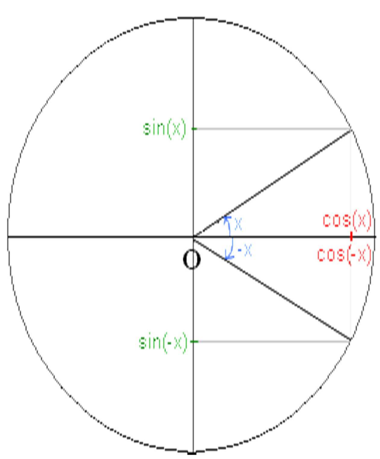
tan( )	$-\tan x$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$-\dfrac{1}{\tan x}$

$(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} \sin(x+2k\pi)=\sin(x) \\ \cos(x+2k\pi)=\cos(x) \end{cases}$	
$(k \in \mathbb{Z})$ $\tan(x+k\pi)=\tan x$	
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$	$\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$
$-1 \le \sin x \le 1$ $-1 \le \cos x \le 1$	$\sin^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

إشارة cos و sin



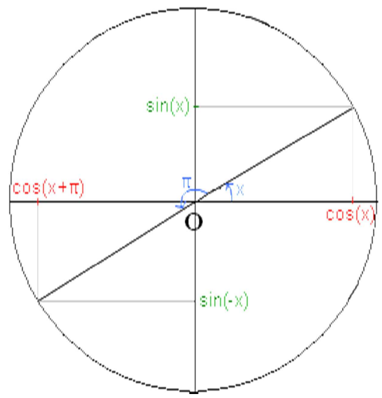
خاصيات



$\cos(-x)=\cos(x)$

et

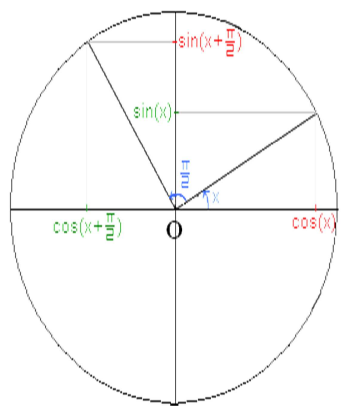
$\sin(-x)=-\sin(x)$



$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

et

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$



$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

et

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

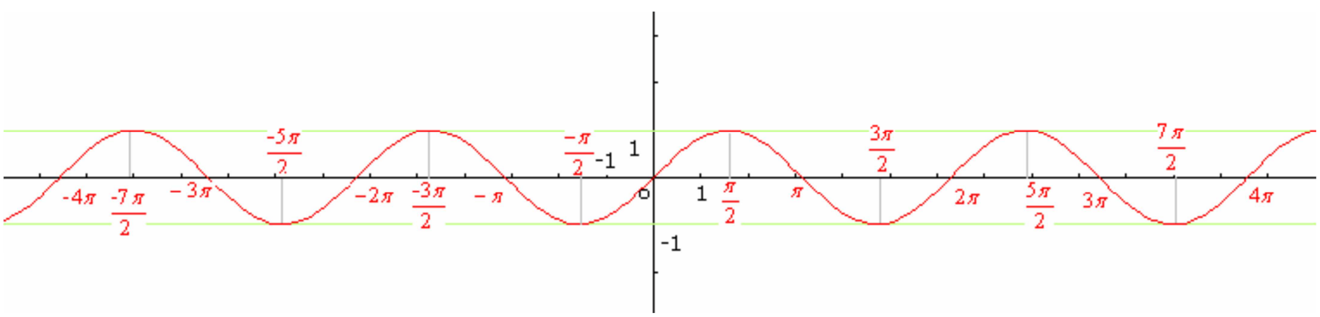
بنفس الطريقة يمكن الإشتغال على الدائرة لاستنتاج : $\cos(\pi - x)$ و $\sin(\pi - x)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

معادلات مثلثية

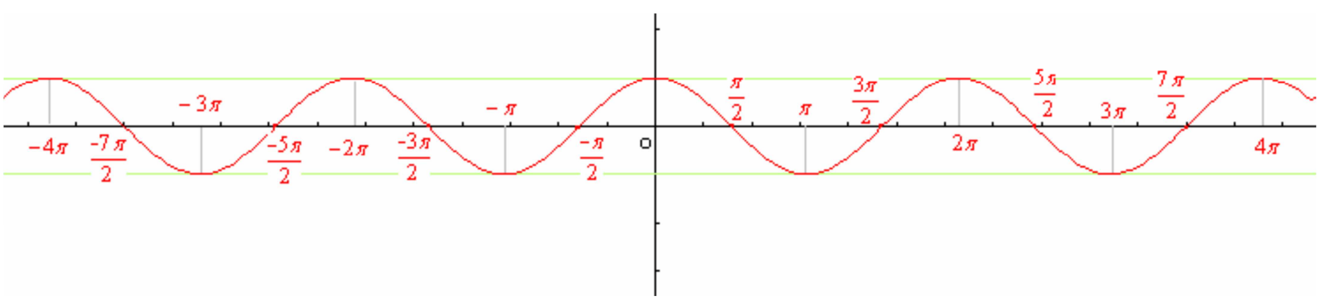
$\tan x = a$	$\sin x = a$	$\cos x = a$
• إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث : $\tan x = a$ تكافئ $\tan x = \tan \alpha$ تكافئ $x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	• إذا كان $a \notin [-1,1]$ فإن المعادلة لا تقبلا حلا في $\mathbb{R}$ • إذا كان $a = 1$ $\sin x = 1$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ • إذا كان $a = -1$ $\sin x = -1$ تكافئ	• إذا كان $a \notin [-1,1]$ فإن المعادلة لا تقبلا حلا في $\mathbb{R}$ • إذا كان $a = 1$ $\cos x = 1$ تكافئ $x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ • إذا كان $a = -1$ $\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ • إذا كان $a \in]-1,1[$

يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0,\pi[$ بحيث $\cos x = a$ تكافئ $\cos x = \cos\alpha$ تكافئ : $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ **حالة خاصة** $\cos x = 0$ تكافئ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ • إذا كان $a \in]-1,1[$ يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ بحيث $\sin x = a$ تكافئ $\sin x = \sin\alpha$ تكافئ : $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ **حالة خاصة** $\sin x = 0$ تكافئ $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	

منحنى دالة sin



منحنى دالة cos



منحنى دالة tan