الهندسة الفضائية

التمرين 1

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(2,0,0)$ **و** $B(2,2,2)$ **و** $C(0,0,2)$ **و** $I(2,1,2)$ **و** $J(0,-1,0)$

1) **حدد مثلوث إحداثيات** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
2) **استنتج أن** $x-y+z-2=0$ **معادلة ديكارتية للمستوى** (ABC)
3) **تأكد أن المستقيم** (IJ) **عمودي على المستوى** (ABC)
4) **لتكن** (S) **الفلكة التي مركزها** I **و المماسة للمستوى** (ABC)
   أ. **حدد معادلة ديكارتية للفلكة** (S)
   ب. **حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس الفلكة** (S) **و المستوى** (ABC)

التصحيح

1) **لدينا :** $\overrightarrow{AB}(0,2,2)$ **و** $\overrightarrow{AC}(-2,2,2)$

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

ومنه $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

2) **لدينا** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ **متجهة منظمية للمستوى** (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) **تكتب على شكل :** $4x+4y+4z+d=0$

و بما أن $A(2,0,0)\in(ABC)$ **فإن :** $4(2)+4(0)+4(0)+d=0$ **و منه** $d=-8$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) **تكتب على شكل :** $4x+4y+4z-8=0$

و منه نستنتج أن : $x+y+z-2=0$ **معادلة ديكارتية للمستوى** (ABC)

3) لدينا $\overrightarrow{IJ}\left(-2,-2,-2\right)$ متجهة موجهة للمستقيم $\left(IJ\right)$ و لدينا $\overrightarrow{AB}\left(4,4,4\right)$ متجهة منظمية للمستوى $\left(ABC\right)$

و نلاحظ أن : $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان

و منه $\overrightarrow{IJ}$ هي أيضا متجهة منظمية للمستوى $\left(ABC\right)$

و بالتالي المستقيم $\left(IJ\right)$ عمودي على المستوى $\left(ABC\right)$

4) أ. لدينا $\left(S\right)$ الفلكة التي مركزها $I\left(2,1,2\right)$ و المماسة للمستوى $\left(ABC\right)$

إذن r شعاع الفلكة $\left(S\right)$ يساوي $d\left(I,\left(ABC\right)\right)$

لنحسب $d\left(I,\left(ABC\right)\right)$:

$$d\left(I,\left(ABC\right)\right)=\frac{\left|\left(2\right)+\left(1\right)+\left(2\right)-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

و منه $\left(S\right)$ الفلكة التي مركزها $I\left(2,1,2\right)$ و شعاعها $r=\sqrt{3}$

إذن معادلة ديكارتية للفلكة $\left(S\right)$ تكتب على شكل : $\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-2\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

ب. ليكن $\left(\Delta\right)$ المستقيم المار من النقطة $I\left(2,1,2\right)$ و العمودي على المستوى $\left(ABC\right)$

و بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(4,4,4\right)$ متجهة منظمية للمستوى $\left(ABC\right)$ فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(4,4,4\right)$ هي أيضا متجهة موجهة للمستقيم $\left(\Delta\right)$.

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم $\left(\Delta\right)$ يكتب على شكل : $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ $\begin{cases}x=2+4t\\ y=1+4t\\ z=2+4t\end{cases}$

لتكن $H\left(x_H,y_H,z_H\right)$ نقطة تماس الفلكة $\left(S\right)$ و المستوى $\left(ABC\right)$

$$H\left(x_H,y_H,z_H\right)\in\left(\Delta\right)\cap\left(S\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=2+4t\\ y_H=1+4t & \left(t\in\mathbb{R}\right)\\ z_H=2+4t\\ x_H+y_H+z_H-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1+4t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z_H = 2+4t \\ (2+4t)+(1+4t)+(2+4t)-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1+4t \\ z_H = 2+4t \\ t = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 \end{cases}$$

و بالتالي النقطة $H(1,0,1)$ هي نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC)