الثانية اقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني لـ 2016 – الدورة العادية

<u>التمرين الأول</u> : (4.5 نقط)

	نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $u_0 = 0$ **و** $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$
0.5	**1. أحسب** u_1 **و** u_2
0.5	**2. بين بالترجع أن لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n < \frac{5}{3}$
0.5	**3. أ. بين أن لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right)$
0.75	**ب. استنتج أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متتالية تزايدية و أنها متقاربة**
	4. نضع $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$
0.25	**أ. أحسب** v_0
0.5	**ب. بين أن المتتالية** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **هندسية أساسها** $\frac{2}{5}$
1	**ج. أحسب** v_n **بدلالة** n **ثم استنتج أن** $u_n = \frac{-5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$
0.5	**د. أحسب النهاية** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

<u>التمرين الثاني</u> : (4.5 نقط) (تقدم جميع نتائج هذا التمرين على شكل كسر)

	يحتوي كيس على سبع كرات غير قابلة للتمييز باللمس ، كرتان لونهما أبيض و ثلاث كرات لونها أحمر و كرتان لونهما أخضر . نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس. **1. نعتبر الحدثين التاليين :** A **: " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "** B **: " من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة حمراء "**
1	**أ. بين أن احتمال الحدث** A **هو** $p(A) = \frac{5}{21}$
1	**ب. أحسب احتمال الحدث** B
1	**ج. بين أن** $p(A\cap B) = \frac{1}{7}$

د. هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك .	0.5
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوس عدد الكرات الحمراء المسحوبة.	
أ. املإ الجدول جانته بعد نقله على ورقة تحريرك معللا جوابك .	0.75
ب. أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0.25

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$			

التمرين الثالث : (11 نقطة)

الجزء الأول :

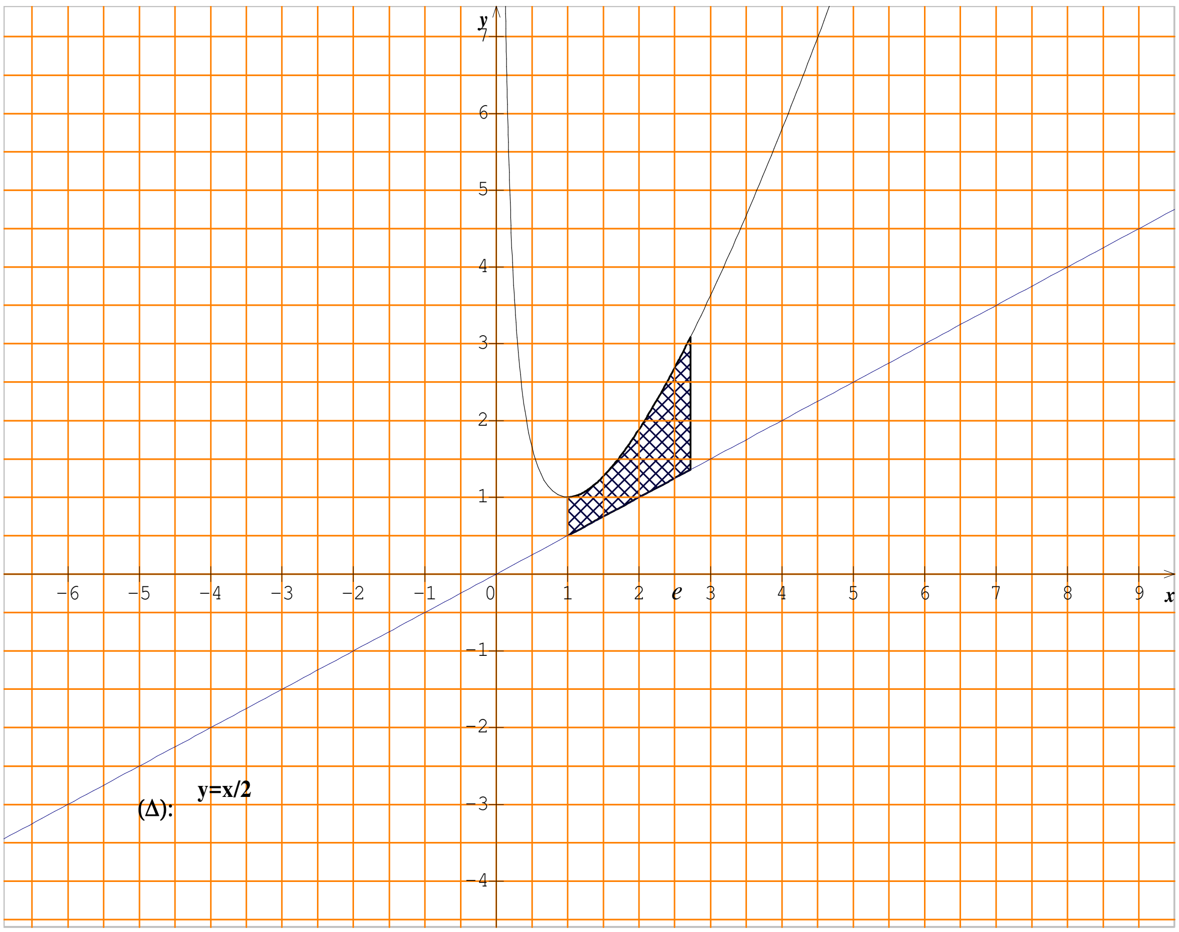
نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$	
1. أ. بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=-\infty$	0.5
ب. أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	0.5
2. أ. تحقق أن لكل x من $]0,+\infty[$: $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$	0.5
ب. إعط إشارة $g'(x)$ على $]0,+\infty[$	0.5
ج. أحسب $g(1)$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$	0.75
د. استنتج من جدول تغيرات g أن $g(x)\leq 0$ على $]0,1]$ و أن $g(x)\geq 0$ على $[1,+\infty[$	1

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$ و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$	
1. أ. بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .	1
ب. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .	1.75
2. أ. بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$	1
ب. أحسب $f(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f	1
3. نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\frac{-x^2}{4}+\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\ln x$	
بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$	1

4. **في الشكل أسفله** (C) **هو التمثيل المبياني للدالة** f **و** (Δ) **هو المستقيم ذو المعادلة** $y=\frac{x}{2}$

أحسب مساحة الجزء المخدش .



تصحيح التمرين الأول :

1. لدينا : $u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1 = \frac{2}{5}(0) + 1 = 1$ و $u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1 = \frac{2}{5}(1) + 1 = \frac{2+5}{5} = \frac{7}{5}$

2. لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n < \frac{5}{3}$

- من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 0$ إذن $u_0 < \frac{5}{3}$
- ليكن n من $\mathbb{N}$:
  - ✓ نفترض أن : $u_n < \frac{5}{3}$
  - ✓ و نبين أن : $u_{n+1} < \frac{5}{3}$

لدينا حسب الإفتراض : $u_n < \frac{5}{3}$

إذن $\frac{2}{5}u_n < \frac{2}{3}$

إذن $\frac{2}{5}u_n + 1 < \frac{5}{3}$

و منه $u_{n+1} < \frac{5}{3}$

- نستنتج : أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n < \frac{5}{3}$

3. أ. ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{5}u_n + 1 - u_n \\ &= \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + 1 \\ &= \frac{-3}{5}u_n + 1 \\ &= \frac{-3}{5}(u_n - 1) \end{aligned}$$

نستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right)$

ب.

- ليكن n من $\mathbb{N}$:

لدينا حسب نتيجة السؤال 2. $u_n < \frac{5}{3}$ إذن $u_n - \frac{5}{3} < 0$

إذن $\frac{-3}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) > 0$

و منه نستنتج أن : $u_{n+1} - u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية

- بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة (بالعدد $\frac{5}{3}$) فإنها متقاربة

4. نضع $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ. لدينا : $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 0 - \frac{5}{3} = \frac{-5}{3}$

ب. ليكن n من $\mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right)$

إذن : $v_{n+1} = \frac{2}{5}.v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

ج.

- بما أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{-5}{3}$

فإن $v_n = v_0 \times q^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه $v_n = \frac{-5}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

- لدينا $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $u_n = v_n + \frac{5}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه $u_n = \frac{-5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

د. بما أن $-1 < \frac{2}{5} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{-5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

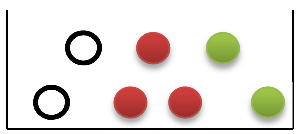
و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}$

تصحيح التمرين الثاني :

التجربة : " نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس "

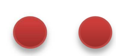
ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_7^2 = 21$



1. أ. A : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "

أو



أو

لدينا : $cardA = C_2^2 + C_3^2 + C_2^2 = 1 + 3 + 1 = 5$

إذن : $p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{5}{21}$

ب. B : " من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة حمراء "

$\overline{B}$: " عدم الحصول على أية كرة حمراء "

لدينا : $card\,\overline{B} = C_4^2 = 6$

إذن : $p\left(\overline{B}\right) = \frac{card\,\overline{B}}{card\,\Omega} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

و نعلم أن : $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

ج. $A\cap B$ " الكرتان لهما نفس اللون و من بينهما توجد على الأقل كرة حمراء "

$A\cap B$ " الحصول على كرتين حمراوتين "

لدينا : $card(A\cap B)=C_3^2=3$

إذن : $p(A\cap B)=\frac{card(A\cap B)}{card\,\Omega}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

د. لدينا : $p(A\cap B)=\frac{1}{7}$ و $p(A)\times p(B)=\frac{5}{21}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{49}$

بما أن : $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ فإن الحدثين غير مستقلين

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوس عدد الكرات الحمراء المسحوبة.
القيم التي يأخذها X هي : 0 و 1 و 2

أ. $(X=0)$ " عدم الحصول على أية كرة حمراء من بين الكرتين المسحوبتين "

$$p(X=0)=p(\overline{B})=\frac{2}{7}$$

$(X=1)$ " الحصول على كرة حمراء بالضبط من بين الكرتين المسحوبتين "

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{21}=\frac{3\times 4}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$(X=2)$ " الحصول على كرتين حمراوتين "

$p(X=2)=\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ (أوبطريقة أخرى $p(X=2)=p(A\cap B)=\frac{1}{7}$)

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

ب. الأمل الرياضي:

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{7}\right)+\left(1\times\frac{4}{7}\right)+\left(2\times\frac{1}{7}\right)$$

تصحيح التمرين الثالث :

الجزء الأول :

.1 أ. لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1-\frac{1}{x^2}+\ln(x)=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-1}{x^2}=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty\end{cases}$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2}+\ln(x)=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\end{cases}$

.2 أ. ليكن x من $]0,+\infty[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

$$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}+\ln(x)\right)'=0-\frac{-(x^2)'}{(x^2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x}$$

و منه : لكل x من $]0,+\infty[$: $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$

ب. ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا : $x>0$ إذن : $\frac{1}{x}>0$ و $\frac{2}{x^3}>0$ إذن : $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$

و منه : $g'(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$

ج. لدينا : $g(1)=1-\frac{1}{(1)^2}+\ln(1)=1-1+0=0$

بما أن $g'(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ فإن الدالة g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

د.

- على المجال $]0,1]$:

لدينا : $0 < x \leq 1$ و g تزايدية

إذن : $g(x) \leq g(1)$

و منه : $g(x) \leq 0$

- على المجال $[1,+\infty[$:

لدينا : $x \geq 1$ و g تزايدية

إذن : $g(x) \geq g(1)$

و منه : $g(x) \geq 0$

<u>الجزء الثاني :</u>

1. أ.

- لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + x\ln(x) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0 \end{cases}$

- التأويل الهندسي:

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ فإن (C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 0$

ب.

- لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x\ln(x) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$

- لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} + \ln(x) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$

- بما أن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$ فإن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2. أ. ليكن x من $]0,+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + x.\ln(x)\right)' = \frac{-1}{x^2} + \left((x)'.\ln(x) + x.\ln'(x)\right) = \frac{-1}{x^2} + 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \ln(x) + 1$$

إذن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب.

- $f(1) = \dfrac{1}{1} + 1.\ln(1) = 1 + 0 = 1$
- لدينا $f'(x) = g(x)$ **لكل** x **من** $]0,+\infty[$

و حسب الجزء الأول 2. د. لدينا : $g(x) \leq 0$ على $]0,1]$ و $g(x) \geq 0$ على $[1,+\infty[$

إذن : $f'(x) \leq 0$ على $]0,1]$ و $f'(x) \geq 0$ على $[1,+\infty[$

و منه f تناقصية على $]0,1]$ و f تزايدية على $[1,+\infty[$

جدول تغيرات f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. لنبين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$

✓ F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا :

$$F'(x)=\left(\frac{-x^2}{x}+\left(\frac{x^2}{2}+1\right).\ln(x)\right)'=-\frac{2x}{4}+\left(\frac{x^2}{2}+1\right)'.\ln(x)+\left(\frac{x^2}{2}+1\right).\ln'(x)=\frac{-x}{2}+x.\ln(x)+\left(\frac{x^2}{2}+1\right).\frac{1}{x}$$

إذن : $F'(x)=\frac{-x}{2}+x.\ln(x)+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+x.\ln(x)$

و منه : $F'(x)=f(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

و بالتالي : F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$

4. لنحسب مساحة الجزء المخدش :

أي مساحة الحيز بين (C) و المستقيمات التي معادلاتها $y=\frac{x}{2}$ و $x=1$ و $x=e$

لدينا : $\mathcal{A}=\int_1^e\left|f(x)-\frac{x}{2}\right|dx.(U.A)$

على المجال $[1,e]$ لدينا : $f(x)-\frac{x}{2}\geq 0$ ((C) يوجد فوق (Δ))

إذن : $\mathcal{A}=\int_1^e\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx.(U.A)$

إذن : $\mathcal{A}=\left[F(x)-\frac{x^2}{4}\right]_1^e.(U.A)$

إذن : $\mathcal{A}=\left[-\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x^2}{2}+1\right).\ln(x)-\frac{x^2}{4}\right]_1^e.(U.A)$

إذن : $\mathcal{A} = \left[-\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}+1\right).\ln(x)\right]_1^e .(U.A)$

إذن : $\mathcal{A} = \left[-\frac{e^2}{2} + \left(\frac{e^2}{2}+1\right).\ln(e)\right] - \left[-\frac{1^2}{2} + \left(\frac{1^2}{2}+1\right).\ln(1)\right].(U.A)$

إذن : $\mathcal{A} = (1) - \left(-\frac{1}{2}\right).(U.A)$

و بالتالي : $\mathcal{A} = \frac{3}{2}.(U.A)$