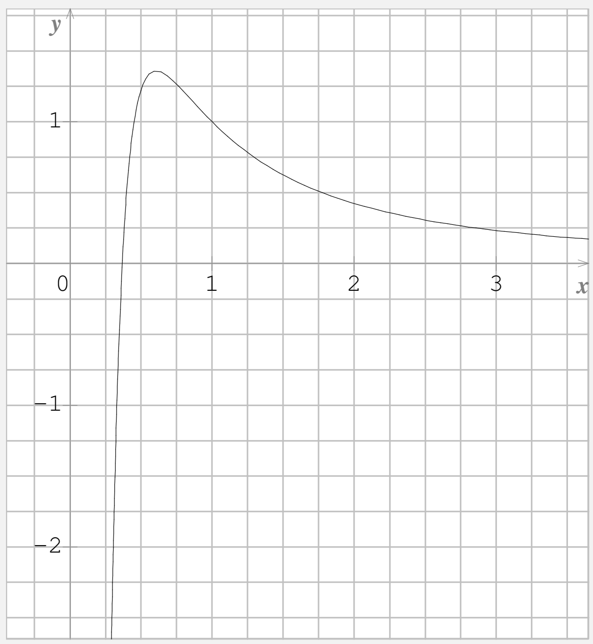
اللوغاريتم النبيري (+حساب التكامل)

التمرين 1

مسألة

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (أنظر الشكل أسفله)



1) **أ-** أدرس نهاية f في 0 على اليمين
ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
ج- حدد مقاربات (C_f)

2) **أ-** بين أن : $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$
ب- حل في $]0,+\infty[$ المتراجحة $-1-2\ln x>0$. و استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$
ج- ضع جدول تغيرات f

3) **أ-** بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثيتيها
ب- إستنتج إشارة $f(x)$ على $]0,+\infty[$

4) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نرمز ب I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما

. $x=n$ و $x=\frac{1}{e}$

أ- بين أن $0 \le I_2 \le e-\frac{1}{2}$

ب- بين أن $F : x \mapsto \frac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$

ج- أحسب I_n بدلالة n

د- أدرس نهاية (I_n) عند $+\infty$.

<u>التصحيح</u>

1) أ.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}(1+\ln x)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

- لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty\end{cases}$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty}\frac{1+\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

▪ لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$

ج. **تحديد مقاربات** (C_f)

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Leftarrow (C_f)$ **يقبل مقارب عمودي معادلته** $x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftarrow (C_f)$ **يقبل مقارب أفقي معادلته** $y = 0$ **بجوار** $+\infty$

2) أ. **الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ (كخارج دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$)**

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)'$$
$$= \frac{(1+\ln x)' \times x^2 - (1+\ln x) \times (x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln x) \times 2x}{x^4}$$
$$= \frac{x - 2x - 2x\ln x}{x^4}$$
$$= \frac{-x - 2x\ln x}{x^4}$$
$$= \frac{-x \times (1+2\ln x)}{x \times x^3}$$
$$= \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

إذن : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$

ب. لنحل في $]0,+\infty[$ **المتراجحة** $-1-2\ln x>0$:

$$\begin{aligned}-1-2\ln x>0 &\Leftrightarrow 2\ln x<-1\\ &\Leftrightarrow \ln x<\frac{-1}{2}\\ &\Leftrightarrow x<e^{\frac{-1}{2}}\end{aligned}$$

إذن : $S=\left]0,e^{\frac{-1}{2}}\right[$

لندرس إشارة $f'(x)$ **على** $]0,+\infty[$:

لدينا : $x^3>0$ **إذن إشارة** $f'(x)$ **هي إشارة** $-1-2\ln x$

و منه : $f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ **و** $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}}\leq x$

ج. جدول تغيرات f :

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	0

($e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ **و** $f\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)=\frac{e}{2}$ **)**

(3 أ. ليكن $x\in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\Leftrightarrow 1+\ln x=0\\ &\Leftrightarrow \ln x=-1\\ &\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

إذن (C_f) **يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة** $A\left(e^{-1};0\right)$

ب. لندرس إشارة $f(x)$ **على** $]0,+\infty[$:

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $x^2 > 0$ **إذن إشارة** $f(x)$ **هي إشارة** $1+\ln x$

- **إذا كان** $x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[$:

لدينا : $x < \frac{1}{e}$ **إذن** $\ln x < \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

إذن $\ln x < -1$ ، **إذن** $1+\ln x < 0$ **ومنه** $f(x) < 0$

- **إذا كان** $x \in \left]\frac{1}{e},+\infty\right[$:

لدينا : $x > \frac{1}{e}$ **إذن** $\ln x > \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

إذن $\ln x > -1$ ، **إذن** $1+\ln x > 0$ **ومنه** $f(x) > 0$

5) أ. لدينا I_2 **هي مساحة الحيز المحصور بين** (C_f) **و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما** $x = \frac{1}{e}$ **و** $x = 2$

إذن $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{2} |f(x)|dx \quad (U.A)$

على المجال $\left[\frac{1}{e},2\right]$ **لدينا :** $0 \le f(x) \le \frac{e}{2}$ **إذن** $0 \le \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \le \int_{\frac{1}{e}}^{2} \frac{e}{2}dx$

إذن $0 \le \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \le \frac{e}{2}\left(2-\frac{1}{e}\right)$ **و منه :** $0 \le I_2 \le e - \frac{1}{2}$

ب. لنبين أن $F : x \mapsto \frac{-2-\ln x}{x}$ **دالة أصلية للدالة** f **على** $]0,+\infty[$

الدالة F **قابلة للإشتقاق على** $]0,+\infty[$ **(كخارج دالتين قابلتين للإشتقاق على** $]0,+\infty[$ **)**

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(-2-\ln x)' \times x - (-2-\ln x)\times (x)'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{-1}{x}\times x - (-2-\ln x)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{-1+2+\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1+\ln x}{x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad F'(x) = f(x)$

و بالتالي F **دالة أصلية للدالة** f **على** $]0,+\infty[$.

ج. لدينا : لكل n **من** $\mathbb{N}^*$ ، I_n **هي مساحة الحيز المحصور بين** (C_f) **و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما** $x = \frac{1}{e}$ **و** $x = n$.

إذن : $(U.A)$ $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} |f(x)|dx$

على $\left[\frac{1}{e},n\right]$ **لدينا :** $0\leq f(x)$

إذن :

$$I_n=\int_{\frac{1}{e}}^{n}f(x)dx \qquad (U.A)$$

$$=\left[F(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{n} \qquad (U.A)$$

$$=F(n)-F\left(\frac{1}{e}\right) \qquad (U.A)$$

إذن :

$$=\frac{-2-\ln(n)}{n}-\frac{-2-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} \qquad (U.A)$$

$$=\frac{-2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}+e \qquad (U.A)$$

و منه : $\quad I_n=\frac{-2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}+e \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

د. $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}+e=e$

- لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0\end{cases}$