

مبادئ في المنطق

(1) العبارة

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

(2) الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة

(3) الكممات

الكمم الكوني

لتكن $x \in E$; $P(x)$ العبارة $(\forall x \in E): P(x)$ تقرأ مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ أو تقرأ لكل x من E لدينا $P(x)$ و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة E تحقق $P(x)$ الرمز \forall يسمى الكمم الكوني

الكمم الوجودي

لتكن $x \in E$; $P(x)$ العبارة $(\exists x \in E): P(x)$ تعني يوجد عنصر x على الأقل من E يحقق $P(x)$ الرمز \exists يسمى الكمم الوجودي
 • العبارة $(\exists! x \in E): P(x)$ تعني يوجد عنصر وحيد x من E يحقق $P(x)$ الرمز $\exists!$ يسمى الكمم الوجودي بالوحدانية

إذا كانت الكممات من نفس الطبيعة فترتيبها غير مهم أما إذا كانت من طبيعتين مختلفتين فترتيبها مهم

(4) العمليات المنطقية

نفي عبارة

نفي عبارة P هي عبارة نمرز لها ب \overline{P} أو $nonP$
 \overline{P} تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

P	\overline{P}
1	0
0	1

نفي عبارات مكممة

- نفي العبارة $(\forall x \in E): P(x)$ هي العبارة $(\exists x \in E): \overline{P(x)}$
- نفي العبارة $(\exists x \in E): P(x)$ هي العبارة $(\forall x \in E): \overline{P(x)}$
- نفي العبارة $(\forall x \in E)(\forall y \in F): P(x, y)$ هي العبارة $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \overline{P(x, y)}$
- نفي العبارة $(\exists x \in E)(\forall y \in F): P(x, y)$ هي العبارة $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \overline{P(x, y)}$

الاستدلال بالمثال المضاد:

- ✓ للبرهنة على أن عبارة ما P خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها \overline{P} صحيح
- ✓ للبرهنة على أن العبارة $(\forall x \in E): P(x)$ خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر x من E بحيث تكون $\overline{P(x)}$ صحيحة

الفصل المنطقي

نرمز لفصل عبارتين P و Q بالرمز $(P \vee Q)$ أو $(P \text{ أو } Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين P و Q صحيحة.

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين P و Q بالرمز $(P \wedge Q)$ أو $(P \text{ و } Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا .

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين P و Q بالرمز $P \Rightarrow Q$ و نقرأ P تستلزم Q أو إذا كان P فإن Q و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين P و Q بالرمز $P \Leftrightarrow Q$ و نقرأ $(P$ تكافؤ $Q)$ أو $(P$ تعني $Q)$ أو $(P$ إذا وفقط إذا كان $Q)$ و هو يعني $(P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P)$ ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل P و Q نفس قيم الحقيقية

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(5) القوانين المنطقية

قوانين مورغان

لتكن P و Q عبارتين ، لدينا :

$$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، لدينا :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

قانون التكافؤ المتتالية

العبرة $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ قانون منطقي

قانون الإستلزام المضاد للعكس

العبرة $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ قانون منطقي

قانون الخلف

العبرة $[(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)] \Rightarrow P$ قانون منطقي

قانون فصل الحالات

العبرة $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \Rightarrow R]$ قانون منطقي

مبدأ التراجع

- لتكن $P(n)$ خاصية لمتغير صحيح طبيعي n
- إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون $P(n_0)$ صحيحة
 - إذا كانت العبرة $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ($\forall n \geq n_0$) صحيحة
- فإن العبرة $P(n)$ ($\forall n \geq n_0$) صحيحة