

## النهايات

## (1) نهايات الدوال المرجعية في الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \bullet$$

## (2) النهاية المنعدمة لدالة عددية في الصفر

نقول إن دالة عددية  $f$  ، معرفة على مجال منقط مركزه الصفر ، تؤول إلى الصفر عندما يؤول  $x$  إلى الصفر إذا كانت  $f(x)$  تقترب

من الصفر كلما اقترب  $x$  من الصفر ، و نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

## (3) النهاية المنتهية في نقطة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

- إذا كانت  $P$  دالة حدودية فإنه لكل  $x_0$  من  $\mathbb{R}$  ، لدينا :  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
- إذا كانت  $R$  دالة حدودية فإنه لكل  $x_0$  من مجموعة تعريفها ، لدينا :  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0)$

## (4) نهاية على اليمين ، نهاية على اليسار في نقطة

- الدوال المعرفة على يمين  $x_0$  ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع  $]x_0, a[$  حيث  $a > x_0$  .
- الدوال المعرفة على يسار  $x_0$  ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع  $]b, x_0[$  حيث  $b < x_0$  .

- نقول إن الدالة  $f$  تقبل النهاية  $l$  على اليمين في  $x_0$  ، إذا كانت تنطبق على يمين  $x_0$  مع دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه  $x_0$  تكون نهايتها هي  $l$  عند  $x_0$  .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ أو } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$$

- لدينا تعريف مشابه بالنسبة للنهاية على اليسار في النقطة  $x_0$  ، و نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$  أو  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ تكافئ } (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l)$$

### 5) النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

#### نهايات مقلوبات الدوال المرجعية في $+\infty$ و $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 & \bullet \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & \bullet \end{aligned}$$

#### النهاية المنعدمة لدالة عددية في $+\infty$ أو $-\infty$

- نهاية  $f$  هي الصفر عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  تعني أنه كلما كبر العدد  $x$  و كان موجبا كلما اقترب العدد  $f(x)$  من الصفر . و نكتب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- نهاية  $f$  هي الصفر عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  تعني أنه كلما كبرت القيمة المطلقة للعدد  $x$  و كان سالبا كلما اقترب العدد  $f(x)$  من الصفر . و نكتب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

#### النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0 & \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l & \bullet \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0 & \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l & \bullet \end{aligned}$$

## (6) النهاية اللانتهية في نقطة

النهايات اللانتهية لدوال مرجعية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \bullet$$

النهاية اللانتهية في نقطة

•  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  تعني أن عندما يقترب العدد  $x$  من  $x_0$  فإن العدد  $f(x)$  يصبح كبيرا

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^+ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^- \quad \checkmark$$

(7) النهاية اللانتهية في  $+\infty$  أو  $-\infty$ نهايات الدوال المرجعية في  $+\infty$  أو  $-\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \bullet$$

8 العمليات على النهايات

حالة النهايات المنتهية

إذا كان لدينا :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$  فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l \times m \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kl \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0) \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0) \quad \bullet$$

حالة النهايات اللامنتهية :

✓ إذا كان لدينا :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  فإن :

▪ إذا كان  $k > 0$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = +\infty$

▪ إذا كان  $k < 0$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = -\infty$

▪  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

✓ إذا كان لدينا :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  و كانت  $f$  موجبة فإن :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

✓ إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$  فإن :

▪  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$

▪ إذا كان  $m > 0$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

▪ إذا كان  $m < 0$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

✓ إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

• نهاية دالة حدودية بجوار ما لانهاية هي نهاية حدها الأعلى درجة أي :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{مع } (a_n \neq 0)$$

• نهاية دالة جذرية بجوار ما لانهاية هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة

• الكتابة  $|x| \rightarrow +\infty$  تعني  $x \rightarrow +\infty$  أو  $x \rightarrow -\infty$

(9) الأشكال الغير المحددة

- الكتابات التالية : " $\frac{0}{0}$ " أو " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " أو " $0 \times (\pm\infty)$ " أو " $(+\infty) + (-\infty)$ " تسمى أشكال غير محددة
- في حالة الحصول على شكل غير محدد فإننا نلجأ إلى تغيير طريقة حساب النهاية و غالبا ما نقوم إما بالتعميل أو النشر أو الضرب في المرافق .