الدّوال اللوغَاريثمية

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln} =]0,+\infty[$ $\left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}$ نرمز له ب : e بحيث $e \simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- **إشارة** $\ln x$:
  - إذا كان : $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$
  - إذا كان : $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0,+\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

- ✓ $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- ✓ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- ✓ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- ✓ $\ln(x^r) = r\ln(x)$

4. نهايات هامة :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln x = 0^-$
$\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$	

5. المشتقة اللوغاريتمية :

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$

فإن الدالة $x \mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\forall x \in I \quad \left(\ln|U(x)|\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعا : $\left(\ln(U(x))\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$

نتيجة :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$ هي الدوال : $x \mapsto \ln|U(x)| + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

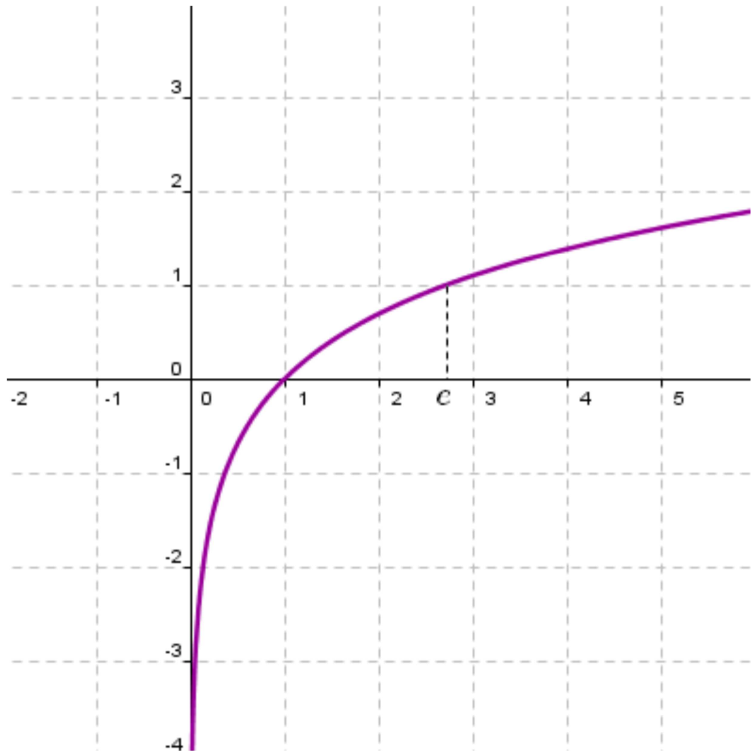
6. دراسة الدالة $\ln$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$ إذن $(C_{\ln})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ إذن $(C_{\ln})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ و لدينا : $\ln(1) = 0$ و $\ln(e) = 1$

التمثيل المبياني للدالة $\ln$:



7. دالة اللوغاريتم للأساس a

أ. تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و يخالف 1

دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a} \quad (\forall x>0)$

أمثلة : $\log_e(x)=\ln x$

$\log_a(1)=0$

$\log_a(a)=1$

ب. العمليات :

ليكن x و y من $]0,+\infty[$

1) $\log_a(x.y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

3) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$

4) $\log_a(x^r)=r\log_a(x)$

ملاحظة : $\log_{\frac{1}{a}}(x)=-\log_a(x)$

ج. حالة خاصة :

تعريف:

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و نرمز لها ب : $\log_{10}$ أو فقط $\log$

أمثلة : $\log(10^x)=x$

$\log(0,1)=\log(10^{-1})=-1$

د. تغيرات الدالة $\log_a$

$\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا : $\log'_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$ $(\forall x>0)$

الحالة 1:

إذا كان $0<a<1$: الدالة $\log_a$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+}\log_a(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=-\infty$

الحالة 2:

إذا كان $a>1$: الدالة $\log_a$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+}\log_a(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty$