تحليلية الجداء السلمي و تطبيقاته

نعتبر في جميع الفقرات أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

الصيغة التحليلية للجداء السلمي

إذا كانت $\vec{U}\left(x,y\right)$ و $\vec{V}\left(x',y'\right)$ فإن $\vec{U}.\vec{V}=xx'+yy'$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$ و $\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{d\acute{e}t\left(\vec{u},\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

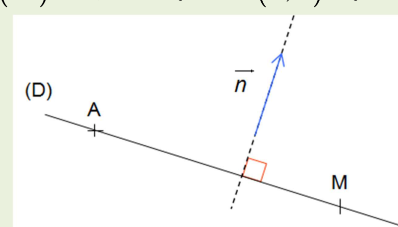
مساحة مثلث ABC : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|d\acute{e}t\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$

المستقيم في المستوى

- كل مستقيم $\left(D\right)$ معادلته الديكارتية تكتب على شكل $ax+by+c=0$

المتجهة $\vec{u}\left(-b,a\right)$ متجهة موجهة ل $\left(D\right)$

المتجهة $\vec{n}\left(a,b\right)$ متجهة منظمية ل $\left(D\right)$



- ليكن $\left(D\right)$ المستقيم المار من $A\left(x_A,y_A\right)$ و $\vec{n}\left(a,b\right)$ متجهة موجهة ل $\left(D\right)$

لدينا $\left(D\right)=\left\{M\in\left(P\right)/\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\right\}$

- الأوضاع النسبية لمستقيمين :

لتكن $\vec{n}\left(a,b\right)$ متجهة منظمية ل $\left(D\right)$

و لتكن $\vec{n}'\left(c,d\right)$ متجهة منظمية ل $\left(\Delta\right)$

  - إذا كانت $d\acute{e}t\left(\vec{n},\vec{n}'\right)\neq 0$ فإن $\left(D\right)$ و $\left(\Delta\right)$ متقاطعان في نقطة وحيدة
  - إذا كانت $d\acute{e}t\left(\vec{n},\vec{n}'\right)=0$ فإن $\left(D\right)$ و $\left(\Delta\right)$متوازيين

مسافة نقطة عن مستقيم :

- ليكن $(D): ax+by+c=0$ و $H\left(x_H, y_H\right)$
- لدينا : $d\left(H,(D)\right)=\dfrac{\left|ax_H+by_H+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

معادلة ديكارتية لدائرة

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها r

$$(C)=\left\{M\in(P) \middle/ \Omega M=r\right\}$$

أ. **معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها:**

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ب. **معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها $[AB]$**

طريقة 1:

لدينا $\Omega(a,b)$ مركز (C) هو منتصف $[AB]$

أي : $a=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $b=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

و شعاع الدائرة (C) هو $r=\dfrac{AB}{2}$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

طريقة 2:

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$

$$(C)=\left\{M\in(P) \middle/ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\right\}$$

ج. **معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بثلاث نقط**

لتكن (C) دائرة تمر من النقط A و B و C

(C) هي دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ هي نقطة تقاطع واسطين من المثلث ABC و شعاع (C) هو : $r=\Omega A=\Omega B=\Omega C$

د. تمثيل بارامتري لدائرة

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها r

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

تحديد داخل و خارج الدائرة :

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة من المستوى

- إذا كانت $\Omega A < r$ فإن A توجد داخل الدائرة
- إذا كانت $\Omega A = r$ فإن A تنتمي إلى الدائرة
- إذا كانت $\Omega A > r$ فإن A توجد خارج الدائرة

الأوضاع النسبية للدائرة و المستقيم في المستوى

ليكن (D) المستقيم ذي المعادلة $ax + by + c = 0$ و لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ و شعاعها r

و لتكن d مسافة $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ عن المستقيم (D)

الحالة 1: إذا كان $d > r$ فإن (C) و المستقيم (D) لا يتقاطعان

الحالة 2: إذا كان $d = r$ فإن المستقيم (D) و الدائرة (C) يتقاطعان في نقطة وحيدة و نقول أن (D) مماس للدائرة (C)

الحالة 3: إذا كان $d < r$ فإن (D) و (C) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين

معادلة المماس للدائرة (C) عند إحدى نقطها

ليكن (D) المستقيم المماس للدائرة (C) في النقطة H

لدينا : $M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{H\Omega}.\overrightarrow{HM} = 0$

تحديد مجموعة النقط M و إشارة الطريقة :

مجموعة النقط M لتي تحقق	إشارة الطريقة
$MA^2 + MB^2 = k$	مبرهنة المتوسط : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
$MA^2 - MB^2 = k$	(I منتصف $[AB]$) $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$	$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$ (I منتصف $[AB]$)
$\frac{MA}{MB}=k$	$\frac{MA}{MB}=k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right)=0$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH}=0$ مع H مرجح $(A,1)$ و (B,k) و G مرجح $(A,1)$ و $(B,-k)$
$aMA^2+bMB^2=k$	$aMA^2+bMB^2=a\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+b\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=(a+b)MG^2+aGA^2+bGB^2$ مع $a+b\neq 0$