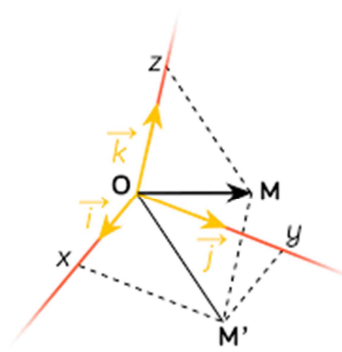


تحليلية الفضاء

إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم-إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

إذا كانت \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاث متجهات غير مستوية و O نقطة من الفضاء .
نقول إن المثلث $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس للفضاء و أن المربوع $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء



ليكن $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما في الفضاء و لنكن M نقطة من الفضاء

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \diamond$$

المثلث (x, y, z) يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و نكتب $M(x, y, z)$

x يسمى أفصول النقطة M

y يسمى أرتوب النقطة M

z يسمى أنسوب النقطة M

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ لكل متجهة \vec{u} من الفضاء توجد ثلاثة أعداد x و y و z حيث

لتكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى أساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v} \quad \blacksquare$$

مجموع المتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو المتجهة: $\vec{u} + \vec{v}(x + x', y + y', z + z')$

ضرب عدد في متجهة: $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ، لدينا :

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$: \overrightarrow{AB} ➤

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ ➤

شرط استقامية متجهتين

لتكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ متجهتين من الفضاء.

$$\left| \begin{array}{cc} x & x' \\ z & z' \end{array} \right| = 0 \text{ و } \left| \begin{array}{cc} y & y' \\ z & z' \end{array} \right| = 0 \text{ و } \left| \begin{array}{cc} x & x' \\ y & y' \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ مستقيمتان} \quad \blacklozenge$$

$$\left| \begin{array}{cc} x & x' \\ z & z' \end{array} \right| \neq 0 \text{ أو } \left| \begin{array}{cc} y & y' \\ z & z' \end{array} \right| \neq 0 \text{ أو } \left| \begin{array}{cc} x & x' \\ y & y' \end{array} \right| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ غير مستقيمتين} \quad \blacklozenge$$

المتجهات المستوائية

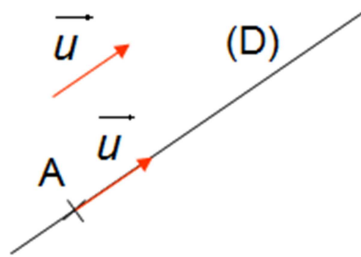
لتكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ و $\vec{w}(x'', y'', z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء.

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ مستوائية} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ غير مستوائية} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \quad \text{حيث:}$$

تمثيل بارامتري لمستقيم



الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ متجهة غير منعدمة .

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow M \in (D)$$

$$\text{النظمة: } \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_A, y_A, z_A)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$

معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

إذا كان (D) مستقيما مارا من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ متجهة موجهة له فإن النظمة :

$$\left(\gamma \neq 0 \text{ و } \beta \neq 0 \text{ و } \alpha \neq 0 \text{ مع } (D) \right) \text{ تسمى أنظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم } \frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$$

تمثيل بارامترى لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ متجهتين غير منعدمتين
 $((t, t') \in \mathbb{R}^2) \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u}' \Leftrightarrow M \in (P)$

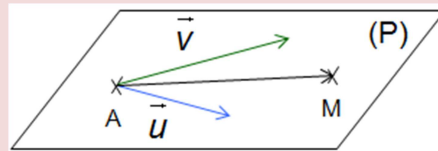
$$\text{النظمة : } \begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \quad ((t, t') \in \mathbb{R}^2) \text{ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى } (P) \text{ المار من}$$

$\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ بالمتجهتين $A(x_A, y_A, z_A)$

معادلة ديكارتية لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
ليكن (P) لمستوى المار من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow M(x, y, z) \in (P)$$



معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $ax + by + cz + d = 0$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$)

الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

- ليكن $(\Delta) = D(B, \vec{v})$ و $(D) = D(A, \vec{u})$ مستقيمين في الفضاء
- إذا كانت \vec{v} و \vec{u} مستقيمتين و $A \in (\Delta)$ أو $B \in (D)$ فإن $(D) = (\Delta)$
 - إذا كانت \vec{v} و \vec{u} مستقيمتين و $A \notin (\Delta)$ فإن (D) و (Δ) متوازيان قطعاً
 - إذا كانت \vec{v} و \vec{u} غير مستقيمتين و $dét(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ فإن (D) و (Δ) متقاطعان
 - إذا كانت \vec{v} و \vec{u} غير مستقيمتين و $dét(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ فإن (D) و (Δ) غير مستوائيين

الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

- ليكن $(Q) = P(B, \vec{u}', \vec{v}')$ و $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ مستويين في الفضاء
- (Q) و (P) متوازيين إذا فقط إذا كانت $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') = 0$ و $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') = 0$ أي \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' و \vec{v}' مستوائية
 - (Q) و (P) متقاطعان إذا فقط إذا كانت $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') \neq 0$ و $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') \neq 0$ أي \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' و \vec{v}' غير مستوائية

- $(P): ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ و $(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ حيث $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$
- (Q) و (P) متقاطعان إذا فقط إذا كانت $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$
 - (Q) و (P) متوازيان قطعاً إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث:
 $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' \neq \lambda d$
 - (Q) و (P) منطبقين إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث:
 $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' = \lambda d$

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء

- ليكن $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ مستوى في الفضاء و $(D) = D(B, \vec{w})$ مستقيم في الفضاء
- (D) و (P) متوازيان إذا وفقط إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية أي $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
 - (D) و (P) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية أي $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

❖ لنكن $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

إحداثيات المتجهة $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$:

المسافة $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$:

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

❖ لنكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

منظم متجهة : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

خاصية : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

❖ تمثيل بارامترى لمستقيم:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$

\vec{u} مستقيمتان \overline{AM} و $M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow$

$(t \in \mathbb{R}) \quad \overline{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow$

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

❖ معادلة ديكارتية لمستوى:

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a, b, c)$ منظمية للمستوى (P)

$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

خاصية:

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ فإن $\vec{n}(a, b, c)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P) .

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r و نرمز لها بالرمز : $S(\Omega, r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ و شعاعها r هي :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

ج. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من الفضاء

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

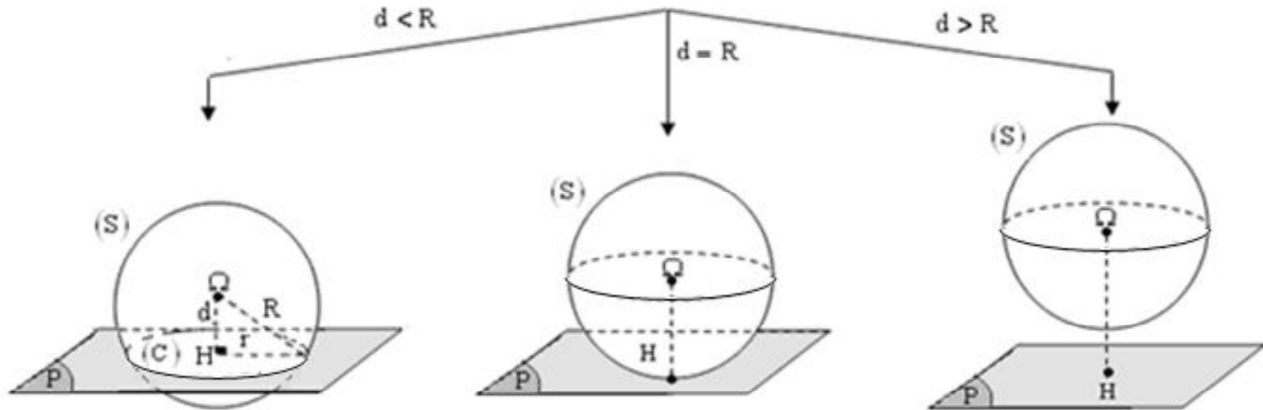
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} \text{ تكافئ } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

هناك ثلاث حالات :

- E مجموعة فارغة : $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} < 0$
- E هي النقطة الأحادية $\left\{ \Omega \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right) \right\}$: $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} = 0$
- E هي الفلكة التي مركزها $\Omega \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right)$ وشعاعها $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$: $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} > 0$

الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

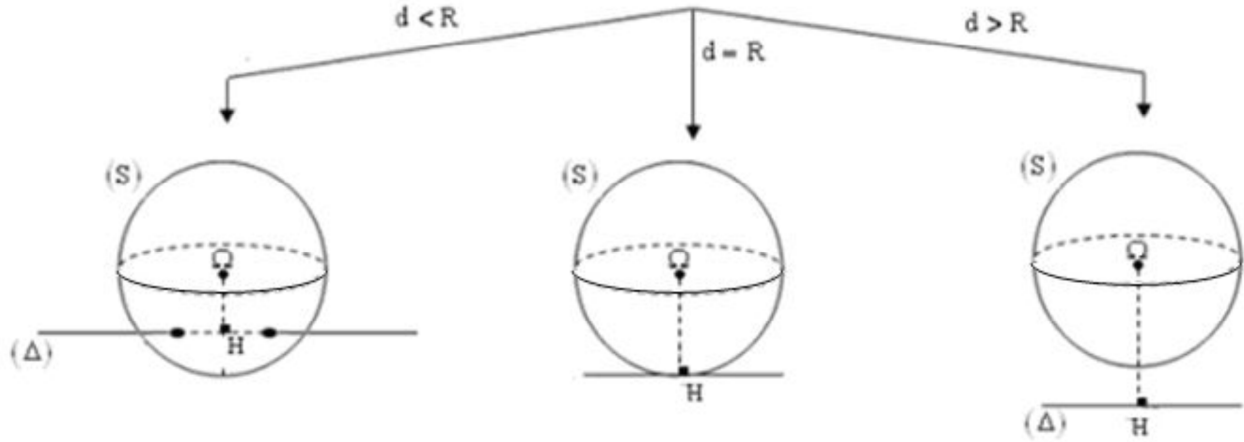
لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها R . نضع $d = d(\Omega, (P))$.
لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)



| | | |
|---|---|------------------------------------|
| المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H وشعاعها $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ | المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H | المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S) |
|---|---|------------------------------------|

الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega, (\Delta))$
لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



| | | |
|---|---|--|
| المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين | المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H | المستقيم (Δ) و الفلكة (S) لا يتقاطعان |
|---|---|--|

الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

$$\text{إذا كان } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ و } \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \text{ فإن}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

ب. استقامية متجهتين :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ يكافئ } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

ج. استقامية ثلاث نقط :

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \text{ يكافئ } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمية}$$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمة وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC)

و المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و لدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$

و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجهًا بالمتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$

هـ. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC} = \frac{\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|}{2}$

مساحة متوازي الأضلاع هي : $S_{ABCD} = \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة \vec{u} هي : $d(\Omega, (D)) = \frac{\|\overline{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax + by + cz + d = 0$ و $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\vec{n}(a, b, c)$ و $\vec{n}'(a', b', c')$ هما متجهتان منظميتان للمستويين (P) و (P')

$(P) \parallel (P')$ يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

$(P) \perp (P')$ يكافئ $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) و (P') متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$