

مبادئ في المنطق

العبارة

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة

المكمات

المكتم الكوني

لتكن $x \in E; P(x)$
العبارة $P(x): (\forall x \in E)$ تقرأ مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ أو تقرأ لكل x من E لدينا $P(x)$ و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة E تحقق $P(x)$
الرمز \forall يسمى المكتم الكوني

المكتم الوجودي

لتكن $x \in E; P(x)$
العبارة $P(x): (\exists x \in E)$ تعني يوجد عنصر x على الأقل من E يحقق $P(x)$
الرمز \exists يسمى المكتم الوجودي
العبارة $P(x): (\exists! x \in E)$ تعني يوجد عنصر وحيد x من E يحقق $P(x)$
الرمز $\exists!$ يسمى المكتم الوجودي بالوحدانية

إذا كانت المكمات من نفس الطبيعة فترتيبها غير مهم أما إذا كانت من طبيعتين مختلفتين فترتيبها مهم

العمليات المنطقية

نفي عبارة

نفي عبارة P هي عبارة نمرز لها ب \bar{P} أو $\text{non}P$
 \bar{P} تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

P	\bar{P}
1	0
0	1

نفي عبارات مكممة

نفي العبارة: $(\forall x \in E): P(x)$ هي العبارة: $(\exists x \in E): \bar{P}(x)$ $\color{red}{\oplus}$
 نفي العبارة: $(\exists x \in E): P(x)$ هي العبارة: $(\forall x \in E): \bar{P}(x)$ $\color{red}{\oplus}$
 نفي العبارة: $(\forall x \in E)(\forall y \in F): P(x, y)$ هي العبارة: $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \bar{P}(x, y)$ $\color{red}{\oplus}$
 نفي العبارة: $(\exists x \in E)(\exists y \in F): P(x, y)$ هي العبارة: $(\forall x \in E)(\forall y \in F): \bar{P}(x, y)$ $\color{red}{\oplus}$

الإستدلال بالمثال المضاد:

✓ للبرهنة على أن عبارة ما P خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها \bar{P} صحيح
 ✓ للبرهنة على أن العبارة $(\forall x \in E): P(x)$ خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر x من E بحيث تكون $\bar{P}(x)$ صحيحة

الفصل المنطقي

نمرز لفصل عبارتين P و Q بالرمز: $(P \vee Q)$ أو $(P \text{ أو } Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين P و Q صحيحة.

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين P و Q بالرمز : $(P \wedge Q)$ أو $(P \text{ و } Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا .

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين P و Q بالرمز : $P \Rightarrow Q$ و نقرأ P تستلزم Q أو إذا كان P فإن Q و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين P و Q بالرمز : $P \Leftrightarrow Q$ و نقرأ $(P \text{ تكافؤ } Q)$ أو $(P \text{ تعني } Q)$ أو $(P \text{ إذا وفقط إذا كان } Q)$ و هو يعني $(P \Rightarrow Q \text{ و } Q \Rightarrow P)$ ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل P و Q نفس قيم الحقيقية

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

القوانين المنطقية

قوانين مورغان

لتكن P و Q عبارتين ، لدينا :

$$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \quad \overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، لدينا :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

قانون التكافؤ المتتالية

$$\text{العبرة } [(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R) \text{ قانون منطقي}$$

قانون الإستلزام المضاد للعكس

$$\text{العبرة } (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \text{ قانون منطقي}$$

قانون الخلف

$$\text{العبرة } [(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)] \Rightarrow P \text{ قانون منطقي}$$

قانون فصل الحالات

$$\text{العبرة } [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \Rightarrow R] \text{ قانون منطقي}$$

مبدأ التراجع

لتكن $P(n)$ خاصية لمتغير صحيح طبيعي n ❖ إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون $P(n_0)$ صحيحة❖ إذا كانت العبرة $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ صحيحة $(\forall n \geq n_0)$ فإن العبرة $P(n)$ صحيحة $(\forall n \geq n_0)$