

الدوال الأسية

1. الدالة الأسية النبيرية:أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة \ln تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : \exp

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x \quad \text{ملاحظة:}$$

ب. نتائج:

$$\begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases} \quad \diamond$$

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\mapsto]0, +\infty[\\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned} \quad \diamond$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \quad \text{و} \quad D_{\exp} = \mathbb{R} \quad \diamond$$

ليكن x و y من \mathbb{R} لدينا :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad \bullet$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y \quad \bullet$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y \quad \bullet$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ln(e^x) = x \quad \diamond$$

$$\forall x > 0: e^{\ln x} = x \quad \diamond$$

$$e^1 = e \quad \text{و} \quad e^0 = 1 \quad \diamond$$

ج. العمليات:

ليكن x و y من \mathbb{R} لدينا :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad (3)$$

$$(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx} \quad (4)$$

د. النهايات:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & n : \text{pair} \\ 0^- & n : \text{impair} \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

د. الاشتقاق و الأصلية:

(1) الدالة exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$

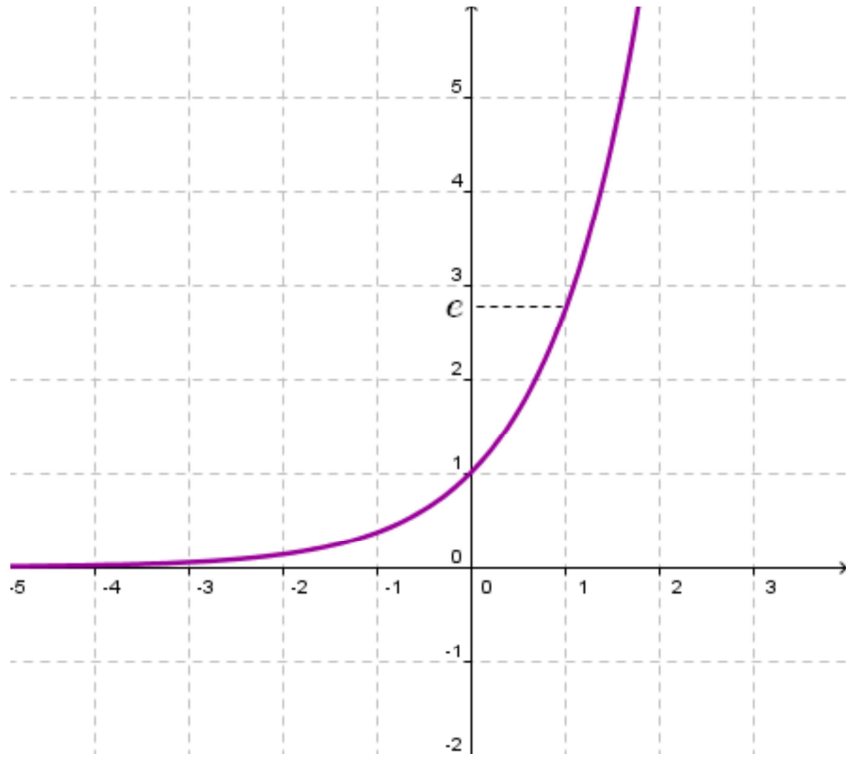
(2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x \in I) (e^{U(x)})' = U'(x) e^{U(x)}$$

$$(\forall x \in I) (e^{rx})' = r e^{rx} \quad (3)$$

$$(4)$$

الأصلية	الدالة
e^x	e^x
$\frac{1}{r} e^{rx}$	e^{rx}
$e^{U(x)}$	$U'(x) e^{U(x)}$

و. التمثيل المبياني للدالة \exp 

2. الدالة الأسية للأساس a حيث $a > 0$ و $a \neq 1$:

أ. تعريف :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x$ هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

ب. نتائج :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a} \quad \diamond$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(a^x) = x \ln a \quad \diamond$$

$$\begin{cases} \exp_a(x) = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a(y) \\ (y > 0) \end{cases} \quad \diamond$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad \diamond$$

ج. العمليات :ليكن x و y من \mathbb{R} لدينا :

$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \diamond$	$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \diamond$
$(a^x)^y = a^{xy} \quad \diamond$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \diamond$

د. الاشتقاق و التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = \ln a \times a^x$$

نتيجة :

- إذا كان : $a > 1$
فإن \exp_a تزايدية قطعاً على \mathbb{R}
ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty$
- إذا كان : $0 < a < 1$
فإن \exp_a تناقصية قطعاً على \mathbb{R}
ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$