

اتصال دالة عددية

(1) تذكير : النهايات

1. لكل n من \mathbb{N}^* لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n : \text{pair} \\ -\infty & n : \text{impair} \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

5. جداول النهايات:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(2) اتصال دالة في عدد :**تعريف 1:**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a$$

تعريف 2:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \text{ على اليمين} \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \text{ على اليسار} \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a \quad \checkmark$$

(3) الإتصال على مجال :**خاصيات :**

- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$
- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $]a, b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a, b[$ و متصلة على يسار b

(4) العمليات على الدوال المتصلة

❖ الدوال الحدودية متصلة على \mathbb{R}

❖ الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

❖ الدوال المثلثية \sin و \cos متصلتان على \mathbb{R}

❖ دالة \tan متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

❖ إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f + g$ و $f \times g$ متصلتان على I

❖ إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g \neq 0$ على I فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان على I .

❖ إذا كانت f متصلة على مجال I و $f \geq 0$ على I فإن \sqrt{f} متصلة على I .

❖ إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I

4) صورة مجال بدالة متصلة ورتبية قطعا

$f(I)$	المجال I	
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	تزايدية قطعا
$\left[f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b) \right]$	$]a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$]b, +\infty[$	

$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$]-\infty, +\infty[$	f تناقصية قطعاً
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a) \right[$	$[a, b[$	
$\left[f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$]a, b]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$	$]-\infty, a]$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$]-\infty, a[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b) \right[$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x) \right[$	$]b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$]-\infty, +\infty[$	

(5) مبرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت f متصلة على $[a; b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a; b]$ بحيث : $f(c) = \lambda$

نتائج :

▪ مبرهنة القيم الوسيطة (وجودية الحل على $[a, b]$).

إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a, b[$

▪ مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a, b]$)

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a, b[$

▪ مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

(6) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعاً :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J = f(I)$ نحو I

نتائج:

$$(1) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

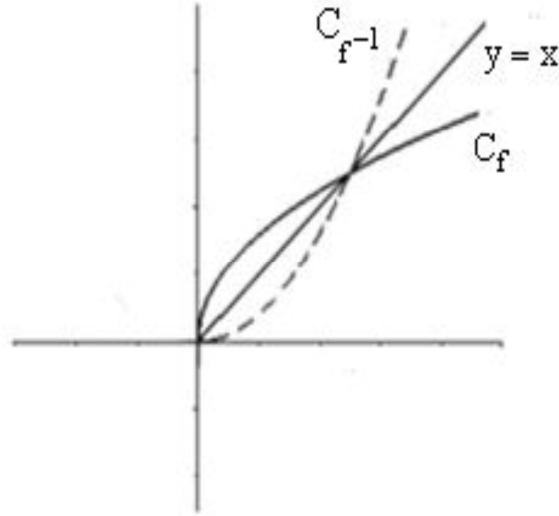
خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

f^{-1} متصلة على المجال J 🇲🇲

f و f^{-1} لهما نفس الرتبة 🇲🇲

f^{-1} منحنى هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم) 🇲🇲



(7) الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

أ. تعريف:

ليكن n من \mathbb{N}^*
 الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ على المجال $[0, +\infty[$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ونرمز لها بـ: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
 الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

ب. خصائص:

ليكن x و y عدداً حقيقيين موجبان. لدينا:

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^m} \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

ج. خاصية:

لتكن f دالة و $n \in \mathbb{N}^*$

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

(8) القوى الجذرية لعدد حقيقي:

أ. تعريف:

ليكن n و m من \mathbb{N}^* و $x > 0$ لدينا:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

ب. خاصية:

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y و لكل r و r' من \mathbb{Q}^* :

$$\begin{aligned} (x^r)^{r'} &= x^{r \cdot r'} \quad \bullet & x^r \cdot y^r &= (x \cdot y)^r \quad \bullet & x^{r+r'} &= x^r \cdot x^{r'} \quad \bullet \\ \frac{x^r}{x^{r'}} &= x^{r-r'} \quad \bullet & \frac{x^r}{y^r} &= \left(\frac{x}{y}\right)^r \quad \bullet & \frac{1}{x^r} &= x^{-r} \quad \bullet \end{aligned}$$