

## الدوال اللوغاريتمية

## 1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x}$  على المجال  $]0, +\infty[$  والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز :

$\ln$

## 2. استنتاجات و خاصيات :

$$D_{\ln} = ]0, +\infty[ \quad \left( \ln(\boxed{>0}) \right) \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad \text{إذن الدالة } \ln \text{ تزايدية قطعا على } ]0, +\infty[ \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

$$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

$$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

$$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

$$\ln(1) = 0 \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

يوجد عدد حقيقي وحيد من  $\mathbb{R}$  نرمز له بـ  $e$  بحيث  $e \simeq 2,718$  و يحقق :  $\ln(e) = 1$   $\color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$

$$\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a \quad \color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$$

إشارة  $\ln x$   $\color{red}\color{blue}\color{green}\color{yellow}\color{cyan}\color{magenta}\color{black}$

• إذا كان :  $0 < x < 1$  فإن  $\ln x < 0$

• إذا كان :  $x \geq 1$  فإن  $\ln x \geq 0$

3. العمليات على الدالة  $\ln$ 

ليكن  $x$  و  $y$  من  $]0, +\infty[$  و  $r \in \mathbb{Q}$  لدينا :

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \checkmark$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \checkmark$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \checkmark$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad \checkmark$$

**4. نهايات هامة :**

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$	

**5. المشتقة اللوغاريتمية :**

**خاصية :**

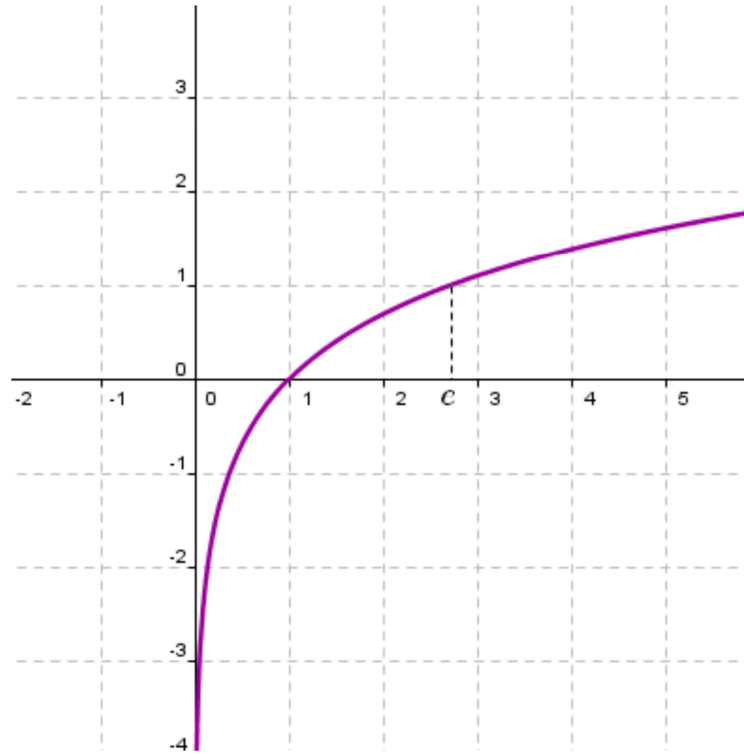
إذا كانت  $U$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  بحيث :  $\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$   
 فإن الدالة  $x \mapsto \ln|U(x)|$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا :  $\forall x \in I \quad (\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$   
 ملاحظة : إذا كانت  $U$  موجبة قطعاً :  $(\ln(U(x)))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$

**نتيجة :**

مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$  هي الدوال :  $x \mapsto \ln|U(x)| + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

**6. دراسة الدالة  $\ln$**

لدينا  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  إذن  $(C_{\ln})$  يقبل مقارباً عمودياً معادلته  $x = 0$   
 ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  إذن  $(C_{\ln})$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار  $+\infty$   
 الدالة  $\ln$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$  ولدينا :  $\ln(1) = 0$  و  $\ln(e) = 1$

التمثيل المبياني للدالة  $\ln$  :**7. دالة اللوغاريتم للأساس  $a$** **أ. تعريف :**ليكن  $a$  عددا حقيقيا موجبا قطعيا و يخالف 1دالة اللوغاريتم للأساس  $a$  هي الدالة المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$  ( $\forall x > 0$ )أمثلة :  $\log_e(x) = \ln x$ 

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

**ب. العمليات :**ليكن  $x$  و  $y$  من  $]0, +\infty[$ 

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad (2)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad (3)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x) \quad (4)$$

$$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x) \quad \text{ملاحظة :}$$

### ج. حالة خاصة :

#### تعريف:

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و نرسم لها ب :  $\log_{10}$  أو فقط  $\log$

$$\log(10^x) = x \quad \text{أمثلة :}$$

$$\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$$

### د. تغيرات الدالة $\log_a$

$$(\forall x > 0) \quad \log'_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{و لدينا : } ]0, +\infty[$$

#### الحالة 1:

إذا كان  $0 < a < 1$  : الدالة  $\log_a$  تناقصية قطعاً على  $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$$

#### الحالة 2:

إذا كان  $a > 1$  : الدالة  $\log_a$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$$