اتصال دالة عددية

1) تذكير : النهايات

1. **لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n : pair \\ -\infty & n : impair \end{cases}$
2. **نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة**
3. **نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام**
4. **جداول النهايات:**

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) اتصال دالة في عدد :

تعريف 1:

f متصلة في a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

تعريف 2:

- ✓ f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

3) الإتصال على مجال :

خاصيات :

- f متصلة على مجال $]a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$
- f متصلة على مجال $[a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $[a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $]a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يسار b

4) العمليات على الدوال المتصلة

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f+g$ و $f \times g$ متصلتان على I
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g \neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و $f \geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ متصلة على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I

4) صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا

	المجال I	$f(I)$
f تزايدية قطعا	$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
	$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$
	$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),f(b)\right]$
	$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$
	$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(a)\right]$
	$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\right[$
	$[b,+\infty[$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$
	$]b,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$
	$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$
f تناقصية قطعا	$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
	$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x),f(a)\right]$
	$]a,b]$	$\left[f(b),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$
	$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$
	$]-\infty,a]$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
	$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
	$[b,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(b)\right]$
	$]b,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)\right[$

	$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

5) مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=\lambda$

نتائج :

- **مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)**

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- **مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a,b[$

- **مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0\in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

6) الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J=f(I)$ نحو I

نتائج:

$$(1)\quad \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ;x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ;x \in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- **f^{-1} متصلة على المجال J**
- **f و f^{-1} لهما نفس الرتابة**
- **منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم)**