تصحيح وطني 2020
الدورة العادية - علوم تجريبية

التمرين الأول (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+5}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) أحسب u_1	0.25
2) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$	0.5
3) أ) بين أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$، ثم استنتج أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$	1
ب) أحسب النهاية $\lim u_n$	0.5
4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة ب $v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$	0.75
ب) حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$	1

التمرين الثاني (5 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\quad:\quad z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$	
أ) تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$	0.5
ب) استنتج حلي المعادلة (E)	1
2) نعتبر الأعداد العقدية : $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	
أ) تحقق من أن $b\overline{c}=a$ و استنتج أن $ac=4b$	0.75
ب) أكتب العددين العقديين b و c على الشكل المثلثي	0.5
ج) استنتج أن $a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	0.5
3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي b و c و d حيث $d=a^4$.	
ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{12}$	
أ) تحقق أن $z'=\frac{1}{4}az$	0.5
ب) حدد صورة النقطة C بالدوران R	0.25
ج) حدد طبيعة المثلث OBC	0.25
د) بين أن $a^4=128b$ و استنتج أن النقط O و B و D مستقيمية	0.75

التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln(x)$

0.5	1) أ) بين أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$
0.5	ب) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $[1,+\infty[$
0.5	ج) استنتج أن لكل x من المجال $[1,+\infty[$ ، $0\leq\ln(x)\leq 2\sqrt{x}$ (لاحظ أن $2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$)
1	د) بين أن لكل x من المجال $[1,+\infty[$ ، $0\leq\dfrac{(\ln(x))^3}{x^2}\leq\dfrac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x))^3}{x^2}$
0.75	2) أ) بين أن الدالة G المعرفة بما يلي : $G(x)=x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0,+\infty[$
0.75	ب) أحسب التكامل $\int_1^4 g(x)\,dx$

المسألة (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2cm$)

0.5	1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
0.5	2) أ) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\dfrac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$
0.75	ب) حل المعادلة $e^{x-2}-4=0$ ثم بين أن المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty,2+\ln 4]$ و تحت (Δ) على المجال $[2+\ln 4,+\infty[$
0.5	3) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا
0.5	4) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$
0.25	ب) ضع جدول تغيرات الدالة f
0.75	5) أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $A(2,2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)
0.5	6) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$
1	7) أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين: $\ln 2\simeq 0,7$ و $\ln 3\simeq 1,1$)
0.5	8) أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$
0.75	ب) أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f^{-1} (لاحظ أن المستقيم (Δ) عمودي على المنصف الأول للمعلم)
0.5	ج) أحسب $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (لاحظ أن $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)

تصحيح التمرين الأول

1) $$u_1=\frac{2u_0}{2u_0+5}=\frac{2\times\frac{3}{2}}{2\times\frac{3}{2}+5}=\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$$

2) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>0$

✓ من أجل $n=0$

لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$

إذن : $u_0>0$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $u_n>0$

▷ و نبين أن : $u_{n+1}>0$

حسب الافتراض ، لدينا $u_n>0$

إذن $2u_n>0$ و $2u_n+5>0$

إذن $\frac{2u_n}{2u_n+5}>0$

و منه $u_{n+1}>0$

✓ نستنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>0$

3) أ)

○ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نعلم أن $u_n>0$ إذن من الواضح أن $u_{n+1}>0$
- لدينا $5\leq 2u_n+5$

إذن $\frac{1}{2u_n+5}\leq\frac{1}{5}$

إذن $\frac{1}{2u_n+5}\times 2u_n\leq\frac{1}{5}\times 2u_n$

إذن $u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$

نستنتج أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ لنبين بالترجع أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$

لدينا : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{3}{2}$

إذن : $0 < u_0 \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

▷ و نبين أن $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

نعلم أن $\boxed{0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n}$ (1)

وحسب الافتراض لدينا : $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

إذن $\boxed{0 < \frac{2}{5}u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

وبالتالي : $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

✓ نستنتج أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب)

○ لدينا $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ بما أن $-1 < \frac{2}{5} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) أ) ليكن $n\in\mathbb{N}$
لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3} \\ &= \frac{4(\frac{2u_n}{2u_n+5})}{2(\frac{2u_n}{2u_n+5})+3} \\ &= \frac{\frac{8u_n}{2u_n+5}}{\frac{4u_n+6u_n+15}{2u_n+5}} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n+15} \\ &= \frac{2\times 4u_n}{5\times(2u_n+3)} \\ &= \frac{2}{5}\times v_n \end{aligned}$$

إذن : $v_{n+1}=\frac{2}{5}\times v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}$

$\triangleright$ لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=\frac{4u_0}{2u_0+3}=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3}=\frac{6}{6}=1$

إذن: $v_n=v_0\times q^n$

إذن : $v_n=1\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

و منه : $\boxed{v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

$\triangleright$ لدينا:

$$v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3} \Leftrightarrow 4u_n=2u_nv_n+3v_n$$
$$\Leftrightarrow 4u_n-2u_nv_n=3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(4-2v_n)=3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n=\frac{3v_n}{4-2v_n}$$

إذن : $\boxed{u_n=\dfrac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4-2\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

تصحيح التمرين الثاني

1) أ)

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right)^2-4\times1\times16\\ &= 4(8+2\sqrt{12})-64\\ &= -32+8\sqrt{12}\\ &= -4\left(8-2\sqrt{12}\right)\\ &= -4\left(\sqrt{6}^2-2\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{2}^2\right)\\ &= -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\ :\ z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

لدينا $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2} \quad \text{أو} \quad z=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$z=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \quad \text{أو} \quad z=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

و بالتالي : $S=\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\ ;\ \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right\}$

2) أ)

○

$$\begin{aligned} b\overline{c} &= 1+i\sqrt{3}\quad \sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i\quad \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ &= a \end{aligned}$$

○

$$\begin{aligned} ac &= b\overline{c}c \\ &= b\times|c|^2 \\ &= b\times\left(\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}\right)^2 \\ &= 4b \end{aligned}$$

ب)

▷ لدينا : $b=1+i\sqrt{3}$

معيار العدد b : $|b|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$$b=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

▷ لدينا : $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

معيار العدد c : $|c|=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{4}=2$

$$c=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ج) لدينا $ac=4b$

إذن $a=4\dfrac{b}{c}$

إذن $$a=4\frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}=4\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

3) أ)

z' M' صورة النقطة z M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{12}$

$$z'-0=e^{i\frac{\pi}{12}}(z-0)$$
$$z'=\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)z$$
$$z'=\frac{1}{4}az$$

ب) لنحدد صورة النقطة C بالدوران R

لدينا $\frac{1}{4}ac=\frac{1}{4}\times 4b=b$

إذن B هي صورة C بالدوران R

ج) لدينا B هي صورة C بالدوران R

إذن $OC=OB$ و $\left(\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

و منه المثلث OBC متساوي الساقين

د)

▷ لدينا $a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

إذن حسب علاقة موافر :

$$a^4=4^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(4\frac{\pi}{12}\right)\right)=256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=128\left(1+i\sqrt{3}\right)=128b$$

▷ $\frac{d-0}{b-0}=\frac{a^4}{b}=\frac{128b}{b}=128$

بما أن $\frac{d-0}{b-0}\in\mathbb{R}$ فإن النقط Oو B و D مستقيمية.

تصحيح التمرين الثالث

1) أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ليكن $x\in]0,+\infty[$

لدينا: $g'(x)=\left(2\sqrt{x}-2-\ln(x)\right)'=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

إذن : لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب) ليكن $x\in [1,+\infty[$

لدينا $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

بما أن $x>0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

نعلم أن $x\geq 1$

إذن $\sqrt{x}\geq 1$

إذن $\sqrt{x}-1\geq 0$

و منه $g'(x)\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$

و بالتالي الدالة g تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

ج) ليكن $x\in [1,+\infty[$

- ▷ لدينا $1\leq x$ إذن $0\leq \ln x$
- ▷ ولدينا $1\leq x$ و الدالة g متصلة و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

  إذن $g(1)\leq g(x)$

  إذن $0\leq 2\sqrt{x}-2-\ln(x)$ (لأن $g(1)=0$)

  إذن $\ln(x)\leq 2\sqrt{x}-2$

  وبما أن $2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$

  فإن $\ln(x)\leq 2\sqrt{x}$

- ○ نستنتج أن لكل x من المجال $[1,+\infty[$ ، $0\leq \ln(x)\leq 2\sqrt{x}$

د)

- ▷ ليكن $x\in [1,+\infty[$

لدينا حسب نتيجة السؤال 1) ج) : $0\leq \ln(x)\leq 2\sqrt{x}$

إذن : $0\leq \left(\ln(x)\right)^3\leq 8x\sqrt{x}$

إذن : $0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$

و منه : لكل x من المجال $]1,+\infty[$ ، $0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

▷ لدينا لكل x من المجال $]1,+\infty[$ ، $0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x}}=0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}=0$

2) أ)

✓ الدالة G قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

✓ ليكن $x\in]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \left(x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)\right)'\\
&= x'\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)'\\
&= 1\times\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\times\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)\\
&= -1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2}{3}\sqrt{x}-1\\
&= 2\sqrt{x}-2-\ln x\\
&= g(x)
\end{aligned}$$

إذن : $G'(x)=g(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

○ وبالتالي G هي دالة أصلية للدالة g على $]0,+\infty[$

ب)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 g(x)\,dx &= [G(x)]_1^4\\
&= G(4)-G(1)\\
&= 4\left(\frac{5}{3}-\ln 4\right)-1\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{19}{3}-4\ln(4)
\end{aligned}$$

تصحيح المسألة

(1

▷ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right) = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x+\dfrac{5}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{e^{x}}{2e^{2}} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}-4 = -4 \end{cases}$$

▷ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right) = -\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\dfrac{5}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{e^{x}}{2e^{2}} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}-4 = +\infty \end{cases}$$

2) أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(-x+\dfrac{5}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right) = 0$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{e^{x}}{2e^{2}} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}-4 = -4 \end{cases}$$

إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x+\dfrac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحنى C بجوار $-\infty$

ب)

▷ لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{x-2}-4=0$

لدينا :

$$\begin{aligned} e^{x-2}-4=0 &\Leftrightarrow e^{x-2}=4 \\ &\Leftrightarrow x-2=\ln 4 \\ &\Leftrightarrow x=2+\ln 4 \end{aligned}$$

إذن : $S=\{2+\ln 4\}$

▷ لندرس الوضع النسبي للمنحنى C و المستقيم Δ

ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)-\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

نعلم أن $e^{x-2}>0$ إذن إشارة $f(x)-\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)$ هي إشارة $-\dfrac{1}{2}\left(e^{x-2}-4\right)$

x	$-\infty$	$2+ln4$	$+\infty$
$(-1/2)(Exp(x-2)-4)$	$+$	0	$-$

✓ على المجال $]-\infty,2+\ln 4]$:

لدينا : $f(x)-\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)\geq 0$

إذن المنحنى (C) يوجد فوق (Δ)

✓ و على المجال $[2+\ln 4,+\infty[$:

لدينا : $f(x)-\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)\leq 0$

إذن المنحنى (C) يوجد تحت (Δ)

(3

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\frac{e^{x-2}}{x}\left(e^{x-2}-4\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

لأن : $\left(\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty\right)$

$$\begin{cases}
\lim_{x\to+\infty}-1+\dfrac{5}{2x}=-1\\
\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{2}\dfrac{e^{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{2e^{2}}\dfrac{e^{x}}{x}=-\infty\\
\lim_{x\to+\infty}e^{x-2}-4=+\infty
\end{cases}$$

✓ بما أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right)' \\
&= -1-\frac{1}{2}\left(\left(e^{x-2}\right)'\left(e^{x-2}-4\right)+e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)'\right) \\
&= -1-\frac{1}{2}\left((x-2)'e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+e^{x-2}(x-2)'e^{x-2}\right) \\
&= -1-\frac{1}{2}\left(e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+\left(e^{x-2}\right)^2\right) \\
&= -\left(1+\frac{1}{2}\left(2\left(e^{x-2}\right)^2-4e^{x-2}\right)\right) \\
&= -\left(1+\left(e^{x-2}\right)^2-2e^{x-2}\right) \\
&= -\left(e^{x-2}-1\right)^2
\end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$

ب) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

5) f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\left(e^{x-2}-1\right)^{2}\right)' \\ &= -2\left(e^{x-2}-1\right)'\left(e^{x-2}-1\right) \\ &= -2(x-2)'e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right) \\ &= -2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right) \\ &= 2e^{x-2}\left(-e^{x-2}+1\right) \end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = 2e^{x-2}\left(-e^{x-2}+1\right)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 2 فإن $A(2,2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) $\left(f(2)=2\right)$

(6

✓ لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$ (كمجموع و جداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$)

✓ بما أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \leq 0$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ فإن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ ولدينا : $f(2+\ln 3) = -(2+\ln 3) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}\left(e^{2+\ln 3-2}-4\right) = 2-\ln 3$

إذن $f(2+\ln 3) > 0$

و لدينا : $f(2+\ln 4) = -(2+\ln 4) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}\left(e^{2+\ln 4-2}-4\right) = \frac{1}{2} - \ln 4$

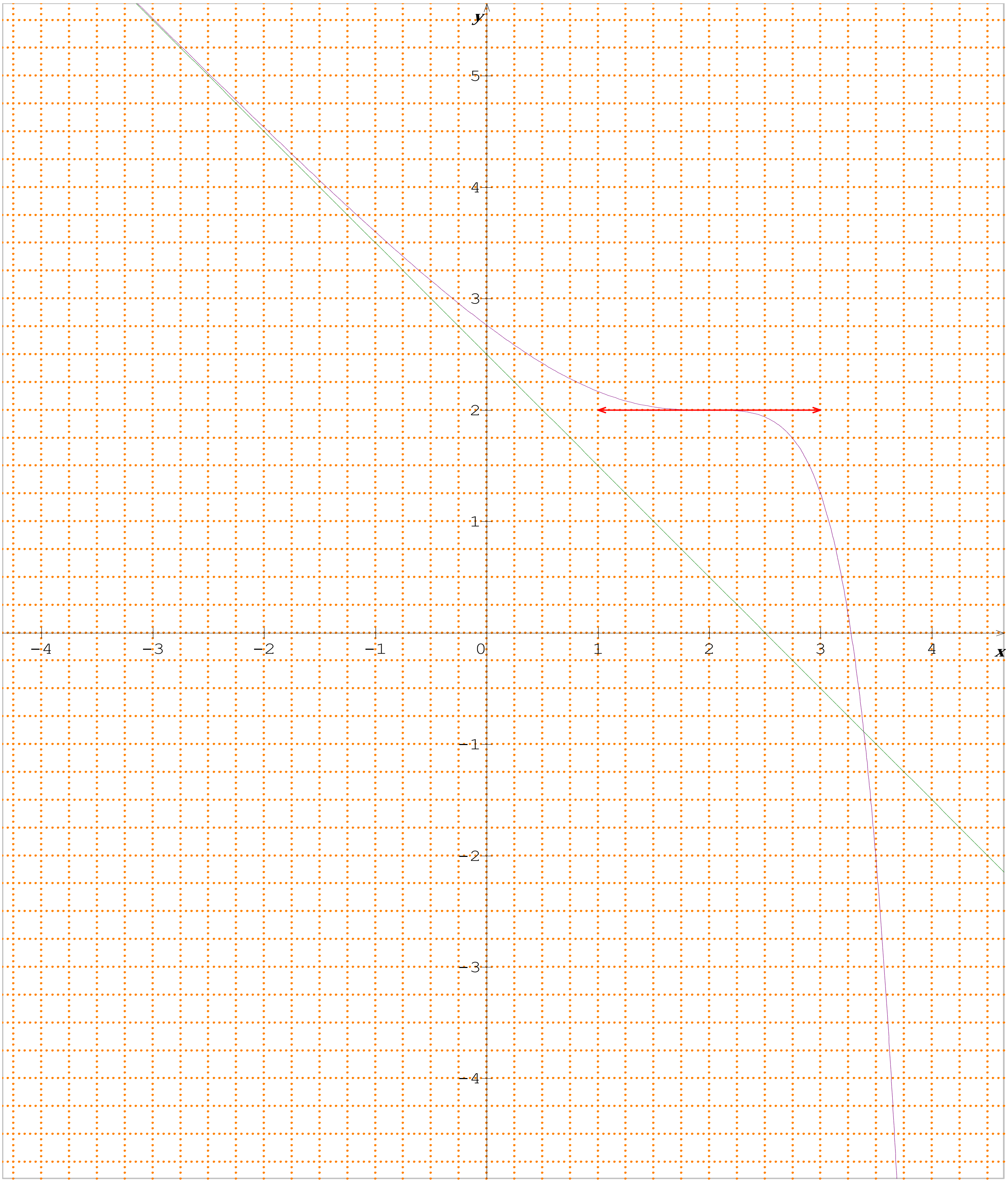
إذن $f(2+\ln 4) < 0$

و منه $f(2+\ln 3) \times f(2+\ln 4) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث

$2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$

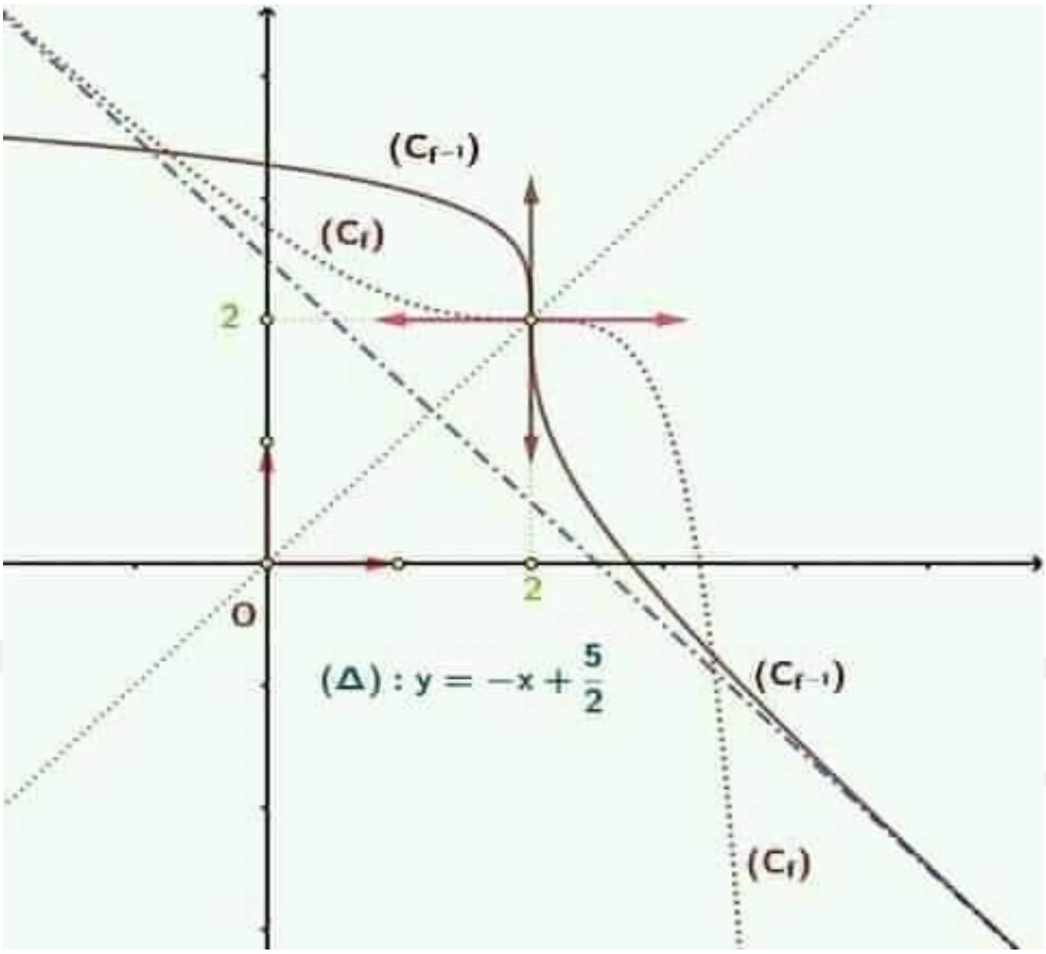
(7



8) أ) بما أن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو $\mathbb{R}$

حيث $J=f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

ب)



2

ج) $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)=\left(f^{-1}\right)'(f(2+\ln 3))=\dfrac{1}{f'(2+\ln 3)}=\dfrac{1}{-4}$