سِلْسِلَةُ المُتَتَالِيَاتِ

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=6$ و $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. أ- أحسب u_1 و u_2

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>\frac{1}{2}$

ج- تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)$ ، ثم استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية وأنها متقاربة

2. نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-\frac{1}{2}$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول v_0

ب- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

3. نضع $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_{n-1}$. بين أن $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

1. أحسب u_1 و u_2

2. أ. تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}+1=\frac{2(u_n+1)}{u_n+3}$ ، ثم بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>-1$

ب. تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+1)^2}{u_n+3}$ ، ثم استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و أنها متقاربة

3. نضع $v_n=\frac{u_n+2}{u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ. أحسب v_0

ب. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\dfrac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$

ج. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، ثم أحسب v_n بدلالة n

د. تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n=\dfrac{-v_n+2}{v_n-1}$

ه. استنتج أن $u_n=\dfrac{-n}{n+2}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. أ. أحسب u_1 و u_2

1. ب-. تحقق من أن $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$ ثم بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>1$

1. ج. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$

1. د. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و أنها متقاربة

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

2. أ. تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n\neq 1$

2. ب. أحسب v_0

2. ج. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$

2. د.أحسب v_n بدلالة n

3.أ. بين أن $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

3. ب. استنتج أن : $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3. ج. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3.د.نضع $w_n=\ln(u_n)$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[1,e]$ ب : $h(x)=x-\ln x$

1. أ. أحسب $h'(x)$ و أدرس إشارتها على المجال $[1,e]$ ثم بين أن h تزايدية على هذا المجال .
   ب. ضع جدول تغيرات الدالة h على المجال $[1,e]$ثم بين أن $h([1,e])\subset[1,e]$
2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=e \\ u_{n+1}=u_n-\ln u_n \quad ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$
   أ. بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $1\leq u_n\leq e$
   ب. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية
   ج. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة
   د. باستعمال ما سبق بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الخامس:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن : $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$
2) بين أن : $u_{n+1}<\dfrac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$
3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية و أنها متقاربة
4) أ. بين بالترجع أن : $u_n<\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$
   ب. حدد نهاية المتتالية (u_n)

التمرين السادس:

نعتبر المتتاليةالعددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=14 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+12 \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) بين بالترجع : $u_n\leq 15 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$
2) أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و استنتج أنها متقاربة
3) لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $v_n=u_n-15$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول
ب. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
ج. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
د.حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n بحيث $u_n > 14,99$
ه. نضع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين السابع:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + 2} & (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) بين بالترجع لكل n من $\mathbb{N}$: $1 \le u_n$
2) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \le u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{3}(u_n - 1)$
3) بين بالترجع لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \le u_n - 1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$
4) ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثامن :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

1) بين أن f رتيبة قطعا على المجال $I =]0,2[$
2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحيث : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = f\ u_n$
أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0 < u_n < 2$
ب. أدرس رتابة (u_n) و استنتج أنها متقاربة
ج. حدد نهاية (u_n)

التمرين التاسع :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

1) أحسب u_1 و u_2
2) أحسب $u_{n+1} - u_n$ ، ثم استنتج رتابة $(u_n)_{n\ge1}$
3) نضع لكل n من $\mathbb{N}^*$، $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$
أ. أحسب S_n بدلالة n
ب. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين العاشر :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) بين بالترجع لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 1$
2) بين أن (u_n) تناقصية و استنتج أنها متقاربة
3) نضع لكل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = \ln(u_n - 1)$
   أ. بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها و حدها الأول
   ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$
   ج. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
4) نضع لكل n من $\mathbb{N}$ ، $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times ...... \times (u_n - 1)$
   بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $P_n = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}} \right)^{n+1}$