الثانية علوم تجريبية

وطني 2011 — دورة عادية

التمرين الأول : (2,5 ن)

1) أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+4x-5=0$	0,5
ب. حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$	1
2) حل في المجال $]0,+\infty[$ المتراجحة : $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$	1

التمرين الثاني : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{5+8u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) بين بالترجع أن : $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,5
2) نضع $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 ثم أكتب v_n بدلالة n	1,5
ب. بين أن : $u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)	1

التمرين الثالث : (5 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$	1
2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=9+i$ و $b=9-i$ و $c=11-i$	
أ. بين أن $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$ ثم استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B	1
ب. اعط الشكل المثلثي للعدد العقدي $4(1-i)$	0,5
ج. بين أن $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ ثم استنتج أن $AC\times BC=4\sqrt{2}$	1
د. ليكن z لحق النقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة B و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$ بين أن : $z'=-iz+10+8i$ ثم تحقق من أن لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هو $9-3i$	1,5

التمرين الرابع : (9,5 ن)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(1-x)e^x-1$	
1) أ. بين أن : $g'(x)=-xe^x$ لكل x من $\mathbb{R}$	0,5
ب. بين أن الدالة g تناقصية على $[0,+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty,0]$ و تحقق من أن $g(0)=0$	0,75

2) استنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$		0,5
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2-x)e^{x}-x$	**II.**	
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)		
1) أ. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$		0,5
ب. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه		0,75
2) أ. بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)+x\right]$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=+\infty$)		0,75
ب. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$		0,25
3) أ. بين أن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$		0,5
ب. أول هندسيا النتيجة $f'(0)=0$		0,25
ج. بين أن الدالة f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f		0,5
4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$ (نقبل أن $e^{\frac{3}{2}}>3$)		0,5
5) أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)+x=0$ و استنتج أن (C) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2,-2)$		0,5
ب. أدرس إشارة $f(x)+x$ على $\mathbb{R}$		0,25
ج. استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على $]-\infty,2[$ و تحت (D) على $]2,+\infty[$		0,25
6) أ. بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0,2)$		0,5
ب. أنشئ المستقيم (D) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$		1
7) أ. باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\dfrac{4}{e}$		1
ب. استنتج ب cm^{2} مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$		0,25

تصحيح التمرين الأول :

1) أ. لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2+4x-5=0$

لدينا : $\Delta = 16+20 = 36$

إذن : $x = \frac{-4+6}{2} = 1$ أو $x = \frac{-4-6}{2} = -5$

و منه : $S = \{-5,1\}$

ب. لنحل في $]0,+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2)+\ln(2x)$

المعادلة معرفة على $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} \ln(x^2+5) = \ln(x+2)+\ln(2x) &\Leftrightarrow \ln(x^2+5) = \ln((x+2)\times 2x) \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+5) = \ln(2x^2+4x) \\ &\Leftrightarrow x^2+5 = 2x^2+4x \\ &\Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \end{aligned}$$

و حسب السؤال 1) أ. : $x=1$ أو $x=-5$

و بما أن : $x>0$ فإن : $x=1$

و منه : $S=\{1\}$

2) لنحل في $]0,+\infty[$ المتراجحة $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$

المتراجحة معرفة على $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1) &\Leftrightarrow \ln(x\times(x+1)) \geq \ln(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+x) \geq \ln(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow x^2+x \geq x^2+1 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

ومنه: $S = [1,+\infty[$

تصحيح التمرين الثاني :

(1

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0 = 1$

إذن : $u_0 > 0$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $u_n > 0$

▷ و نبين أن : $u_{n+1} > 0$

لدينا : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+8u_n}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n > 0$ إذن : $5+8u_n > 0$

و منه : $\dfrac{u_n}{5+8u_n} > 0$

و بالتالي : $u_{n+1} > 0$

✓ نستنتج أن : $u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} + 2 \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{5+8u_n}} + 2 \\ &= \frac{5+8u_n}{u_n} + 2 \\ &= \frac{5+8u_n+2u_n}{u_n} \\ &= \frac{5+10u_n}{u_n} \\ &= 5\times\left(\frac{1+2u_n}{u_n}\right) \\ &= 5\times\left(\frac{1}{u_n}+2\right) \\ &= 5\times v_n \end{aligned}$$

إذن : $v_{n+1} = 5\times v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ و حدها الأول : $v_0 = \dfrac{1}{u_0} + 2 = \dfrac{1}{1} + 2 = 3$

○ لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$

إذن : $\boxed{v_n = 3\times 5^n}$

ب. ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned} v_n=\frac{1}{u_n}+2 \quad &\Leftrightarrow \quad v_n-2=\frac{1}{u_n} \\ &\Leftrightarrow \quad u_n=\frac{1}{v_n-2} \\ &\Leftrightarrow \quad u_n=\frac{1}{3\times5^n-2} \end{aligned}$$

إذن : $u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ لدينا : $5>1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3\times5^n-2}=0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

تصحيح التمرين الثالث :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$

لدينا : $\Delta=(-18)^2-4(1)(82)=-4$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{18+i\sqrt{4}}{2}=\frac{18+2i}{2}=9+i \quad \text{أو} \quad z=\frac{18-i\sqrt{4}}{2}=\frac{18-2i}{2}=9-i$$

و منه : $S=\{9-i,9+i\}$

2) أ.

✓

$$\begin{aligned} \frac{c-b}{a-b} &= \frac{(11-i)-(9-i)}{(9+i)-(9-i)} \\ &= \frac{2}{2i} \\ &= \frac{1}{i} \\ &= \frac{1\times-i}{i\times-i} \\ &= -i \end{aligned}$$

✓ لدينا : $\dfrac{c-b}{a-b}=1\times e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

▷ لدينا : $\arg(\dfrac{c-b}{a-b})\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$

و بالتالي : المثلث ABC قائم الزاوية في B

▷ لدينا : $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right|=1$ إذن : $\dfrac{BC}{BA}=1$ ومنه $BC=BA$

و بالتالي : المثلث ABC متساوي الساقين في B

ب. لنكتب العدد $4(1-i)$ على شكله المثلثي :

✓ لدينا : $|4(1-i)|=|4-4i|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

✓

$$\begin{aligned}4(1-i) &= 4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})\\ &= 4\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})-i\sin(\frac{\pi}{4}))\\ &= 4\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4}))\end{aligned}$$

ج.

✓

$$\begin{aligned}(c-a)(c-b) &= ((11-i)-(9+i))((11-i)-(9-i))\\ &= (2-2i)\times 2\\ &= 4(1-i)\end{aligned}$$

✓

$$AC\times BC=|c-a|\times|c-b|=|(c-a)(c-b)|=|4(1-i)|=4\sqrt{2}$$

د.

✓ لدينا : $R(M)=M' \iff z'-b=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$

و لدينا : $e^{i\frac{3\pi}{2}}=e^{i(\frac{-\pi}{2}+2(1)\pi)}=e^{i(\frac{-\pi}{2})}=-i$

إذن :

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\iff z'-(9-i)=-i(z-(9-i))\\ &\iff z'-9+i=-i(z-9+i)\\ &\iff z'=-iz+9i+1+9-i\\ &\iff z'=-iz+10+8i\end{aligned}$$

✓ لدينا : C' صورة النقطة C بالدوران R
إذن :

$$\begin{aligned} c' &= -ic+10+8i \\ &= -i(11-i)+10+8i \\ &= -11i-1+10+8i \\ &= 9-3i \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الرابع :

I.

1) أ. g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
ليكن $x\in\mathbb{R}$
لدينا :

$$\begin{aligned} g'(x) &= ((1-x)e^x-1)' \\ &= (1-x)'e^x+(1-x)(e^x)'+0 \\ &= -e^x+(1-x)e^x \\ &= (-1+1-x)e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

إذن : $g'(x)=-xe^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب.
○ ليكن $x\in\mathbb{R}$
لدينا : $g'(x)=-xe^x$
نعلم أن $e^x>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$-x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

✓ على المجال $[0,+\infty[$:
لدينا $g'(x)\le 0$
إذن g تناقصية
✓ على المجال $]-\infty,0]$:
لدينا $g'(x)\ge 0$
إذن g تزايدية

○ $g(0)=(1-0)e^0-1=1-1=0$

2) ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا g تناقصية على $[0,+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty,0]$

إذن $g(0)$ هي القيمة القصوية للدالة g على $\mathbb{R}$

إذن $g(x)\leq g(0)$

و منه : $g(x)\leq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

II.

(1 أ. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x+(-x)=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases} & \lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty\end{cases}$

ب.

✓ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-x)e^x-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)\dfrac{e^x}{x}-1=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}2-x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to=\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\end{cases}$

✓

بما أن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to=\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty\end{cases}$

فإن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(2 أ.

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x-x=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-x=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty\end{cases}$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x-x+x=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-xe^x=0$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = 0$

إذن : المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

3) أ.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((2-x)e^x - x)' \\ &= (2-x)'e^x + (2-x)(e^x)' - 1 \\ &= -e^x + (2-x)e^x - 1 \\ &= (-1+2-x)e^x - 1 \\ &= (1-x)e^x - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب. لدينا : $f'(0) = g(0) = 0$ إذن (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $A(0,2)$

ج.

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f'(x) = g(x)$

و حسب الجزء الأول السؤال 2 لدينا $g(x)\le 0$ إذن $f'(x)\le 0$

بما أن $f'(x)\le 0$ و $x=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

فإن الدالة f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

(4

- لدينا :
  - ✓ f متصلة على $\mathbb{R}$
  - ✓ f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
  - ✓ لدينا : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ إذن : $\underline{0 \in f(\mathbb{R})}$

إذن بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

- لدينا f متصلة على $[\frac{3}{2},2]$
- و لدينا :

$f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}}-3)$ إذن $f(\frac{3}{2})>0$ لأن $e^{\frac{3}{2}}>3$

و $f(2)=-2$ إذن $f(2)<0$

و منه $\underline{f(\frac{3}{2})\times f(2)<0}$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\frac{3}{2}<\alpha<2$

(5

أ.

- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)+x=0$

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)+x=0 &\Leftrightarrow (2-x)e^x=0 \\ &\Leftrightarrow 2-x=0 \quad (e^x>0) \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

إذن : $S=\{2\}$

- لدينا :

$$\begin{aligned} M(x,y)\in(C)\cap(D) &\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ f(x)=y, \quad f(x)=-x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ f(x)=y, \quad f(x)+x=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x=2 \quad y=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن : (C) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2,-2)$

ب. ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)+x=(2-x)e^{x}$

نعلم أن : $e^{x}>0$ إذن إشارة $f(x)-(-x)$ هي إشارة $2-x$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$2-x$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$

- ✓ على $]-\infty,2[$: $f(x)+x>0$
- ✓ على $]2,+\infty[$: $f(x)+x<0$

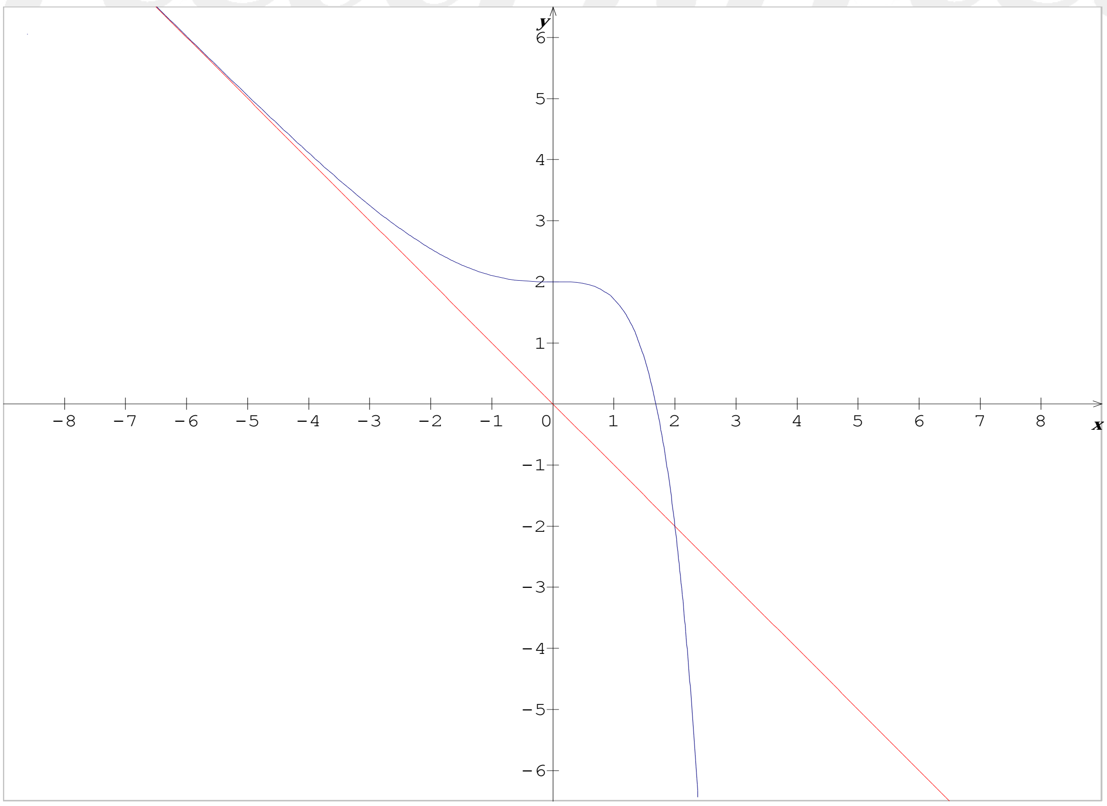
ج. ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)-(-x)=f(x)+x$ إذن حسب السؤال السابق

- ✓ على $]-\infty,2[$: $f(x)-(-x)>0$ إذن (C) يوجد فوق (D)
- ✓ على $]2,+\infty[$: $f(x)-(-x)<0$ إذن (C) يوجد تحت (D)

6) أ. بما أن f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند 0 فإن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0,2)$

ب.



7) أ. باستعمال مكاملة بالأجزاء لنبين أن $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

$$\begin{cases} u(x)=2-x \\ v'(x)=\mathrm{e}^{x} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u'(x)=-1 \\ v(x)=e^{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx &= \left[(2-x)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{x}dx \\ &= \left[(2-x)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\left[-e^{x}\right]_{-1}^{0} \\ &= (2-(3e^{-1}))-(-1-(-e^{-1})) \\ &= 2-\frac{3}{e}+1-\frac{1}{e} \\ &= 3-\frac{4}{e} \end{aligned}$$

ب. مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$ هي :

$$A=\int_{-1}^{0}\left|f(x)-(-x)\right|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

على المجال $[1,0]$ لدينا : $f(x)-(-x)>0$

إذن : $A=\int_{-1}^{0}(f(x)-(-x))dx\times 1cm\times 1cm$

إذن : $A=\int_{-1}^{0}(2-x)\mathrm{e}^{x}\,dx.cm^{2}=(3-\frac{4}{e})cm^{2}$