الثانية علوم تجريبية

الامتحان الوطني 2010 - الدورة الاستدراكية

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ،النقط $A(0,-2,0)$ و $B(1,1,-4)$ و $C(0,1,-4)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$	
1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,2,3)$ و أن شعاعها هو 5	0,5
2) أ. بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ واستنتج أن $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	1
ب. أحسب $d(\Omega,(ABC))$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)	0,5
3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC)	
أ. بين أن : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)	0,5
ب. بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(1,-2,0)$	0,25
ج. تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)	0,25

التمرين الثاني : (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$	1
2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2(4\sqrt{3}+4i)$	
ليكن z لحق النقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{4\pi}{3}$	
أ. بين أن $z'=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z$	0,5
ب. تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R	0,25
ج. بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم أكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي	0,75
د. استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع	0,5

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد 1 1 1 2 2 2 3 3 (لا يمكن التمييز بينها باللمس)	
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق.	
1) ليكن A الحدث : "الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 "	1,25
و B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 "	

بين أن $P(A)=\frac{3}{28}$ و $P(B)=\frac{13}{28}$	
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .	
أ. حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X	0,25
ب. بين أن : $P(X=1)=\frac{15}{28}$	0,75
ج. اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,75

التمرين الرابع : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) بين أن : $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,5
2) بين أن : $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,75
3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأنها متقاربة	0,5
4) أ. بين بالترجع أن : $u_n<(\frac{1}{7})^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$	0,75
ب. حدد نهاية المتتالية (u_n)	0,5

التمرين الخامس : (8 ن)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$	
1) أ. تحقق من أن : $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,25
ب. بين أن : $g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,5
2) أ. تحقق من أن $\frac{3x^2+3x+2}{x}>0$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,25
ب. استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$	0,5
3) أ. بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و أنها تزايدية على $[1,+\infty[$	0,5
ب. استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)>0$)	0,5
II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\Vert\vec{i}\Vert=\Vert\vec{j}\Vert=1cm$)	
1) بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$	1
2) أ. بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا	0,5
ب. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ ثم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (نذكر أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$)	0,75
ج. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0,5

3) بين أن $y=3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$	0,5
4) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها)	0,75
5) أ. باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$ (ضع : $u'(x)=\frac{1}{x^2}$ و $v(x)=\ln x$)	1
ب. بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $(1-\frac{1}{e})cm^2$	0,5

تصحيح التمرين الأول :

(1

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2(1)x+(1)^2+y^2-2(2)y+y^2+z^2-2(3)z+(3)^2=11+(1)^2+(2)^2+(3)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(5)^2 \end{aligned}$$

و منه مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,2,3)$ و أن شعاعها هو $R=5$

2) أ. لدينا $\overrightarrow{AB}(1,3,-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0,3,-4)$

إذن :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}3 & -4\\ 3 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{k} \\ &= (0).\vec{i}-(-4).\vec{j}+(3)\vec{k} \\ &= 4\vec{j}+3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0 \\ &\Leftrightarrow 0.x+4.(y+2)+3.z=0 \end{aligned}$$

و منه : $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب. $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|0.(1)+4.(2)+3.(3)+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=5$

بما أن : $d(\Omega,(ABC))=R$ فإن (ABC) مماس للفلكة (S)

3) أ. لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية للمستوى (ABC) و $(\Delta)\perp(ABC)$

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و لدينا $\Omega(1,2,3)\in(\Delta)$

إذن $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=(1)+t(0)=1 \\ y=(2)+t(4)=2+4t \\ z=(3)+t(3)=3+3t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

ب.

$$H(x,y,z)\in(\Delta)\cap(\mathrm{ABC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \\ 4y+3z+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \\ 4(2+4t)+3(3+3t)+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

و منه مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(1,-2,0)$

ج. نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (ABC)

و بما أن $(\Delta)\perp(ABC)$ و (Δ) مار من Ω فإن نقطة التماس هي تقاطع (Δ) و (ABC)

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S).

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}.z+64=0$

لدينا : $\Delta=-64$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i \quad \text{أو} \quad z=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i$$

و منه : $S=\{4\sqrt{3}-4i, 4\sqrt{3}+4i\}$

2) أ. $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{4\pi}{3}$

$$z'-0=e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-0)$$

$$z'=(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})).z$$

$$z'=(\cos(\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{3})).z$$

$$z'=(-\cos(\frac{\pi}{3})-i\sin(\frac{\pi}{3})).z$$

$$z'=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}).z$$

ب. لدينا :

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}).a &= (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}).(8i)\\ &= -4i+4\sqrt{3}\\ &= b\end{aligned}$$

إذن : B هي صورة النقطة A بالدوران R

ج.

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{c-b} &= \frac{8i-(4\sqrt{3}-4i)}{2(4\sqrt{3}+4i)-(4\sqrt{3}-4i)}\\ &= \frac{-4\sqrt{3}+12i}{4\sqrt{3}+12i}\\ &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\\ &= \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}\\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{4}\\ &= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1.(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$$

د. لدينا : $\dfrac{a-b}{c-b}=1.e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن : $\left|\dfrac{a-b}{c-b}\right|=1$ و $\arg(\dfrac{a-b}{c-b})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

إذن : $\dfrac{BA}{BC}=1$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

إذن : $BA=BC$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

و منه المثلث ABC متساوي الأضلاع

تصحيح التمرين الثالث :

التجربة : سحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\Omega=A_8^2=56$

1) A الحدث : "الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 "

لدينا : $cardA=A_3^2=6$

إذن : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$

B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 "

$\overline{B}$ الحدث : " عدم الحصول على أية كرة تحمل العدد 3 "

لدينا : $card\overline{B}=A_6^2=30$

إذن : $p(\overline{B})=\dfrac{card\overline{B}}{card\Omega}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

ومنه : $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\dfrac{15}{28}=\dfrac{13}{28}$

2) أ.

$P,P \rightarrow X=0$

$\begin{cases}P,I\\I,P\end{cases} \rightarrow X=1$

$I,I \rightarrow X=2$

و منه القيم التي يأخذها X : 0، 1، 2

ب. $p(X=1)=\dfrac{2(A_3^1\times A_5^1)}{56}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

ج. قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$p(X=0)=p(A)=\frac{3}{28}$$

$$p(X=1)=\frac{15}{28}$$

$$p(X=2)=\frac{A_5^2}{56}=\frac{20}{56}=\frac{10}{28}$$

تصحيح التمرين الرابع :

(1

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=1$

إذن : $u_0>0$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $u_n>0$

▷ و نبين أن : $u_{n+1}>0$

لدينا : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{21+u_n}$

و حسب افتراض الترجع : $u_n>0$

إذن : $3u_n>0$ و $21+u_n>0$

إذن : $\dfrac{3u_n}{21+u_n}>0$

و منه : $u_{n+1}>0$

✓ نستنتج : $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n &= \frac{3u_n}{21+u_n}-\frac{u_n}{7} \\ &= \frac{21u_n-21u_n-u_n^2}{7(21+u_n)} \\ &= \frac{-u_n^2}{7(21+u_n)} \end{aligned}$$

من الواضح أن : $\frac{-u_n^2}{7(21+u_n)}<0$ إذن : $u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n<0$

و بالتالي : $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

3)

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $u_n>0$

لدينا $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ إذن $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{7}$ و منه $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

و بالتالي : (u_n) تناقصية (قطعا)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإن (u_n) متقاربة

4)

أ.

✓ من أجل $n=1$:

لدينا : $u_1=\frac{3u_0}{21+u_0}=\frac{3}{22}$ و $(\frac{1}{7})^1=\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$

إذن : $u_1<(\frac{1}{7})^1$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

▷ نفترض أن : $u_n<(\frac{1}{7})^n$

▷ و نبين أن : $u_{n+1}<(\frac{1}{7})^{n+1}$

لدينا حسب السؤال 2 : $\boxed{u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n}(*)$

و حسب افتراض الترجع : $u_n<(\frac{1}{7})^n$ إذن $\boxed{\frac{1}{7}u_n<(\frac{1}{7})^{n+1}}(**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن $u_{n+1} < (\frac{1}{7})^{n+1}$

✓ نستنتج أن : $u_n < (\frac{1}{7})^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ب. لدينا : $0 < u_n < (\frac{1}{7})^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

إذن : $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{7})^n$

و بما أن : $-1 < \frac{1}{7} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{7})^n = 0$

و منه حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

تصحيح التمرين الخامس :

I.

1) أ. ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned}(x-1)(3x^2+3x+2) &= 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 \\ &= 3x^3-x-2\end{aligned}$$

إذن : $3x^3-x-2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب. g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كمجموع لدوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned}g'(x) &= (x^3-x-2\ln(x)+3)' \\ &= 3x^2-1-\frac{2}{x} \\ &= \frac{3x^3-x-2}{x} \\ &= \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}\end{aligned}$$

إذن : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

2) أ. ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $x > 0$ إذن : $3x^2+3x+2 > 0$

و منه : $\frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب. ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

بما أن $\frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$

3) أ. لدينا إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$

x	0 $\quad 1 \quad +\infty$
$x-1$	$-$ $\quad 0 \quad +$

- ✓ على $]0,1]$: $g'(x) \leq 0$ إذن : g تناقصية
- ✓ على $[1,+\infty[$: $g'(x) \geq 0$ إذن : g تزايدية

ب. بما أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$ فإن $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $]0,+\infty[$

إذن : $g(x) \geq g(1) \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $g(x) \geq 3 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

و منه : $g(x) > 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

II.

1) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$

لدينا :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x-1+\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}\right)' \\
&= 1+\frac{(x-1+\ln(x))'x^2-(x-1+\ln(x))(x^2)'}{x^4} \\
&= 1+\frac{(1+\frac{1}{x})x^2-(x-1+\ln(x))2x}{x^4} \\
&= 1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln(x)}{x^4} \\
&= 1+\frac{-x^2+3x-2x\ln(x)}{x^4} \\
&= 1+\frac{-x+3-2\ln(x)}{x^3} \\
&= \frac{x^3-x+3-2\ln(x)}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}
$$

إذن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

- ✓ لدينا : $x>0$ إذن $x^3>0$

و حسب الجزء الأول السؤال 3) ب. لدينا : $g(x)>0$

إذن : $f'(x)>0$

و منه : الدالة f تزايدية (قطعا) على $]0,+\infty[$

2) أ. لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1+\dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}=-\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1=-1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1+\ln(x)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0^+ \end{cases}$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

ب.

- ✓ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2}=0$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0 \end{cases}$$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2} = +\infty$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

ج. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$

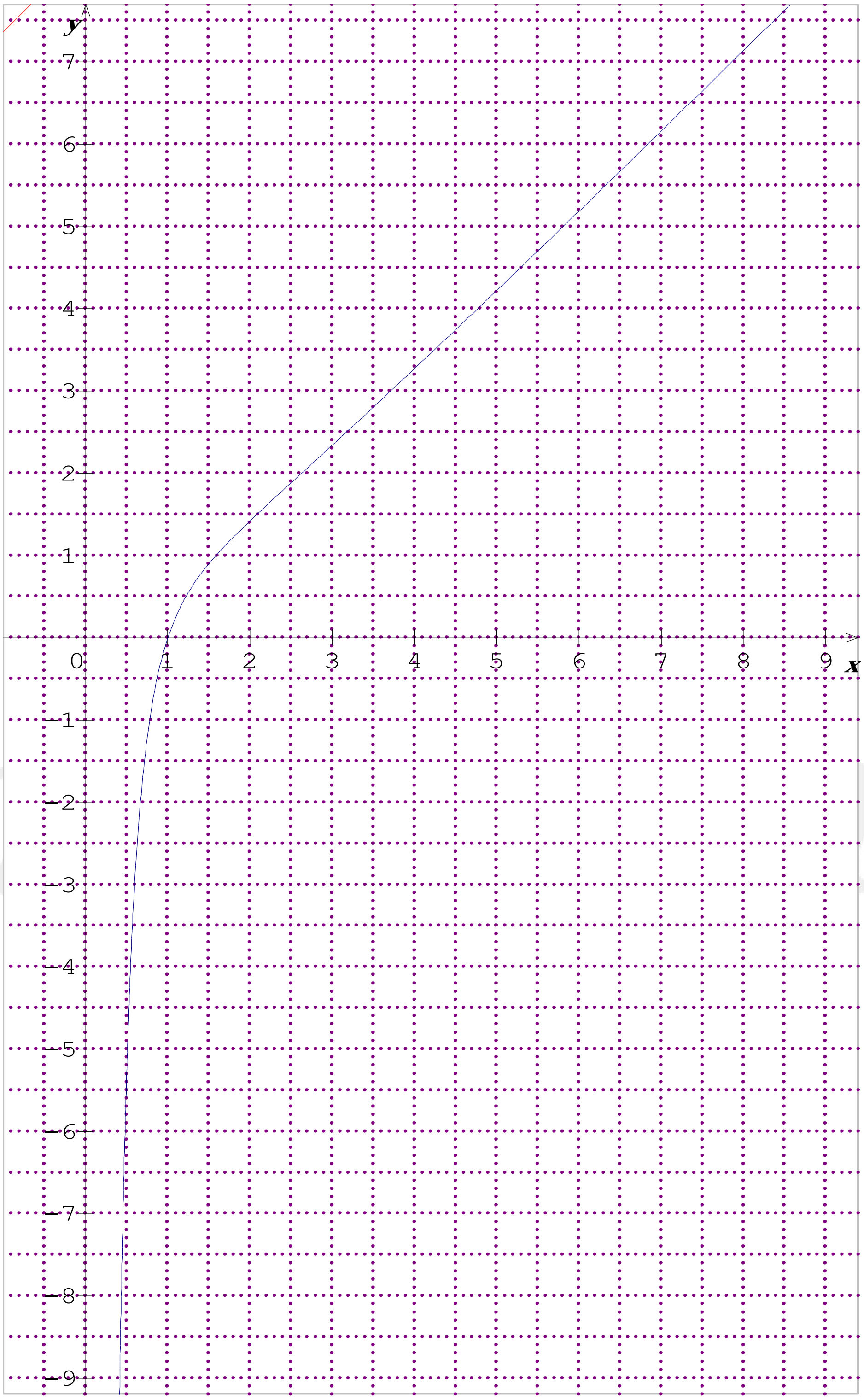
إذن : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3) لدينا : $f(1)=0$ و $f'(1)=3$

إذن معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$، هي :

$$y = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y = 3(x-1)$$

4)



5) أ. لدينا $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}\times \ln(x)dx$

$$\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x^2} \\ v(x)=\ln(x) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u(x)=\frac{-1}{x} \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

إذن :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=[\frac{-\ln(x)}{x}]_1^e-\int_1^e \frac{-1}{x^2}dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=[\frac{-\ln(x)}{x}]_1^e-[\frac{1}{x}]_1^e$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=(\frac{-1}{e}-0)-(\frac{1}{e}-1)$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$$

ب. مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي :

$$A=\int_1^e |f(x)-(x-1)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

لدينا : $f(x)-(x-1)\geq 0$ ((C) يوجد فوق (Δ) على $[1,e]$)

إذن : $A=\int_1^e (f(x)-(x-1))dx\times 1cm\times 1cm$

إذن :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (\frac{x-1+\ln(x)}{x^2})dx.cm^2 \\ &= \int_1^e (\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2})dx.cm^2 \\ &= (\int_1^e \frac{1}{x}dx-\int_1^e \frac{1}{x^2}dx+\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx)cm^2 \\ &= ([\ln(x)]_1^e-[\frac{-1}{x}]_1^e+(1-\frac{2}{e}))cm^2 \\ &= ((1-0)-(\frac{-1}{e}+1)+(1-\frac{2}{e}))cm^2 \\ &= (1-\frac{1}{e})cm^2 \end{aligned}$$

つづく