الثانية علوم تجريبية

الامتحان الوطني 2011 - الدورة الاستدراكية

التمرين الأول : (2,5 ن)

1) أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-2x-3=0$	0,5
ب. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$	1
2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$	1

التمرين الثاني : (4 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$	1
2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a=3+3i$ و $b=3-3i$	
أ. أكتب على الشكل المثلثي كل من العددين a و b	0,5
ب. بين أن b' لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6	0,75
ج. بين أن : $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$ ثم استنتج أن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في B'	1
د. استنتج مما سبق أن الرباعي $OAB'B$ مربع	0,75

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) أ. تحقق من أن : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,5
ب. بين بالترجع أن : $u_n>\dfrac{1}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,5
2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n=1-\dfrac{1}{3u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{6}$ ثم أكتب v_n بدلالة n	1,5
3) بين أن : $u_n=\dfrac{1}{3-2(\frac{1}{6})^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	1

التمرين الرابع : (10 ن)

	I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-1+\ln x$
0,5	1) أ. بين أن $g'(x)=\dfrac{x+1}{x}$ لكل x من I
0,5	ب. بين أن الدالة g تزايدية على I
1	2) استنتج أن $g(x)\geq 0$ على $[1,+\infty[$ و أن $g(x)\leq 0$ على $]0,1]$ (لاحظ أن $g(1)=0$)
	II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على I بما يلي : $f(x)=(\dfrac{x-1}{x})\ln x$
	و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)
0,75	1) أ. بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا
0,5	ب. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ (لاحظ أن $\dfrac{f(x)}{x}=(\dfrac{x-1}{x})\dfrac{\ln x}{x}$ لكل x من I)
0,5	ج. استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه
1	2) أ. بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من I
0,5	ب. استنتج أن الدالة f تزايدية على $[1,+\infty[$ و تناقصية على $]0,1]$
0,25	ج. اعط جدول تغيرات الدالة f على I
1	3) أنشئ (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $1,5$ و 2) .
0,5	4) أ. بين أن $H:x\mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال I
0,75	ب. بين أن $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{1}{2}$
1	ج. باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e \ln x\,dx=1$
0,25	5) أ. تحقق من أن $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ لكل x من I
0,5	ب. بين أن مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي : $0,5cm^2$

تصحيح التمرين الأول :

1) أ. لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-2x-3=0$

لدينا : $\Delta=16$ إذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين

إذن : $x=\dfrac{2+4}{2}=3$ أو $x=\dfrac{2-4}{2}=-1$

و منه : $S=\{-1,3\}$

ب. لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$

المعادلة معرفة على $\mathbb{R}$ لأن : $e^x\neq 0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

لدينا : $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0 \iff (e^x)^2-2e^x-3=0$

و حسب نتيجة السؤال السابق : $e^x=3$ أو $e^x=-1$ (غير ممكن لأن $e^x>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$)

و منه : $x=\ln(3)$

و بالتالي : $S=\{\ln(3)\}$

2) لنحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$

لدينا :

$$\begin{aligned} e^{x+1}-e^{-x}\geq 0 &\iff e^{x+1}\geq e^{-x}\\ &\iff x+1\geq -x\\ &\iff 2x\geq -1\\ &\iff x\geq \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

إذن : $S=\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

لدينا : $\Delta=36-72=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$z=\dfrac{6+i\sqrt{36}}{2}=3+3i$ أو $z=\dfrac{6-i\sqrt{36}}{2}=3-3i$

و منه $S=\{3-3i,3+3i\}$

2) أ.

✓ لدينا: $a=3+3i$

$$|a|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$a=3+3i=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

✓ $$b=3-3i=\overline{a}=\overline{3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

ب. لدينا:

$$\begin{aligned} t(B)=B' &\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA} \\ &\Leftrightarrow b'-b=a-0 \\ &\Leftrightarrow b'=b+a \\ &\Leftrightarrow b'=3+3i+3-3i \end{aligned}$$

إذن b' لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6

ج.

$$\begin{aligned} \frac{b-b'}{a-b'} &= \frac{(3-3i)-(6)}{(3+3i)-(6)} \\ &= \frac{-3-3i}{-3+3i} \\ &= \frac{i(-3+3i)}{-3+3i} \\ &= i \end{aligned}$$

لدينا : $\frac{b-b'}{a-b'}=1\times e^{i\frac{\pi}{2}}$

✓ لدينا : $\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right|=1$

إذن : $\frac{B'B}{B'A}=1$

و منه : $B'B=B'A$

و بالتالي : $AB'B$ متساوي الساقين في B'

✓ و لدينا : $\arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن : $\overline{(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه : $AB'B$ قائم الزاوية في B'

د.

✓ لدينا : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$ إذن : الرباعي $OAB'B$ متوازي أضلاع

✓ و بما أن $B'B=B'A$ فإن الرباعي $OAB'B$ مستطيل

✓ و بما أن $(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ فإن الرباعي $OAB'B$ مربع

تصحيح التمرين الثالث :

1) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-\frac{1}{3} &= \frac{6u_n}{15u_n+1}-\frac{1}{3} \\ &= \frac{18u_n-1-15u_n}{3(15u_n+1)} \\ &= \frac{3u_n-1}{3(15u_n+1)} \\ &= \frac{3(u_n-\frac{1}{3})}{3(15u_n+1)} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب.

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0=1$

إذن $u_0>\frac{1}{3}$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- نفترض أن : $u_n>\frac{1}{3}$
- ة نبين أن : $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

لدينا حسب 1) أ. $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$

و حسب افتراض الترجع : $u_n>\frac{1}{3}$

إذن : $u_n-\frac{1}{3}>0$ و $15u_n+1>0$

إذن : $\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}>0$

إذن : $u_{n+1}-\frac{1}{3}>0$

و منه : $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

✓ نستنتج أن : $u_n>\frac{1}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 1-\frac{1}{3u_{n+1}} \\
&= 1-\frac{1}{\frac{18u_n}{15u_n+1}} \\
&= 1-\frac{15u_n+1}{18u_n} \\
&= \frac{18u_n-15u_n-1}{18u_n} \\
&= \frac{3u_n-1}{18u_n} \\
&= \frac{1}{6}-\frac{1}{18u_n} \\
&= \frac{1}{6}(1-\frac{1}{3u_n}) \\
&= \frac{1}{6}\times v_n
\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_{n+1}=\frac{1}{6}\times v_n$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و حدها الأول : $v_0=1-\frac{1}{3u_0}=1-\frac{1}{3(1)}=\frac{2}{3}$

لنكتب v_n بدلالة n:

لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

إذن : $v_n=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{6})^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

3) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا :

$$v_n = 1 - \frac{1}{3u_n} \Leftrightarrow \frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$$

$$\Leftrightarrow 3u_n = \frac{1}{1-v_n}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3(1-v_n)}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3(1-\frac{2}{3}(\frac{1}{6})^n)}$$

إذن : $u_n = \frac{1}{3-2(\frac{1}{6})^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ لدينا : $-1 < \frac{1}{6} < 1$ إذن : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{6})^n = 0$

و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3-2(\frac{1}{6})^n} = \frac{1}{3}$

تصحيح التمرين الرابع:

I.

1) أ. g قابلة للاشتقاق على $I =]0,+\infty[$ كمجموع لدوال قابلة للاشتقاق على $I =]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$

لدينا :

$$g'(x) = (x-1+\ln(x))' = 1+\frac{1}{x}$$

إذن : $g'(x) = \frac{x+1}{x}$ لكل x من I

ب. ليكن $x \in]0,+\infty[$

لدينا : $x > 0$ إذن : $x+1 > 0$

إذن $\frac{x+1}{x} > 0$

و منه : $g'(x) > 0$

و بالتالي : g تزايدية قطعا على I

2) لدينا $g(1) = 0$

✓ على $[1,+\infty[$:

لدينا $x \geq 1$ و g تزايدية على I

إذن : $g(x) \geq g(1)$

و منه $g(x) \geq 0$ على $[1,+\infty[$

✓ على $]0,1]$:

لدينا : $0 < x \leq 1$ و g تزايدية على I

إذن : $g(x) \leq g(1)$

و منه $g(x) \leq 0$ على $]0,1]$

II.

1) أ. لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x) = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x-1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

ب.

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln(x) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \end{cases}$

ج. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

بجوار $+\infty$

(2 أ. f قابلة للاشتقاق على $I=]0,+\infty[$ كجداء لدوال قابلة للاشتقاق على $I=]0,+\infty[$

ليكن $x\in]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x)\right)' \\ &= \left(\frac{x-1}{x}\right)'\times\ln(x)+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\ln'(x) \\ &= \frac{1}{x^2}\times\ln(x)+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}\times(\ln(x)+x-1) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من I

ب. ليكن $x\in]0,+\infty[$

لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

بما أن $x^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

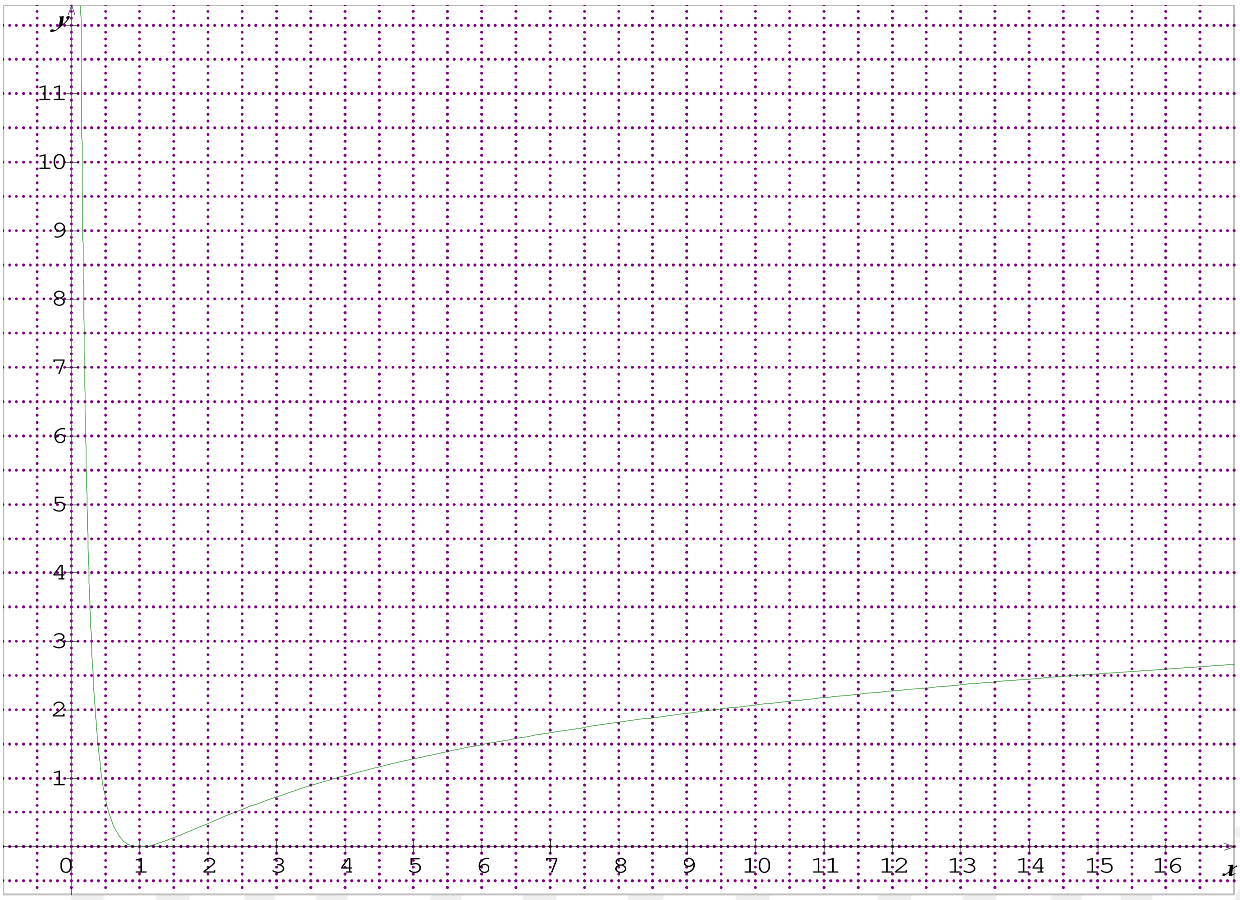
و حسب الجزء الأول السؤال 2 ، لدينا :

- ✓ على $[1,+\infty[$: $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$ و منه f تزايدية على $[1,+\infty[$
- ✓ على $]0,1]$: $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$ و منه f تناقصية على $]0,1]$

ج. جدول تغيرات f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(3



(4 أ.

✓ $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ قابلة للاشتقاق على $I =]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (\frac{1}{2}(\ln(x))^2)' \\ &= \frac{1}{2}((\ln(x))^2)' \\ &= \frac{1}{2}\times 2\ln'(x)\ln(x) \\ &= \frac{1}{x}\ln(x) \end{aligned}$$

إذن : $H'(x) = h(x) \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

و منه $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال I

ب.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx &= \int_1^e h(x)dx \\ &= [H(x)]_1^e \\ &= H(e)-H(1) \\ &= \frac{1}{2}(\ln(e))^2-\frac{1}{2}(\ln(1))^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ج. لدينا : $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e \ln(x)\times 1 dx$

$$\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)dx &= [x\ln(x)]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx \\ &= [x\ln(x)]_1^e-\int_1^e 1dx \\ &= [x\ln(x)]_1^e-[x]_1^e \\ &= (e-0)-(e-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

5) أ. ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$

لدينا :

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x) \\ &= \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x) \\ &= \ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}\end{aligned}$$

إذن : $f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}$ لكل x من I

ب. مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي :

$$A=\int_1^e |f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

لدينا $f(x)\geq 0$ $(\forall x\in I)$ ((C) يوجد فوق محور الأفاصيل)

إذن :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e f(x)dx \times 1cm \times 1cm \\ &= \int_1^e (\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x})dx.cm^2 \\ &= (\int_1^e \ln(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx).\mathrm{cm}^2 \\ &= (1-\frac{1}{2}).\mathrm{cm}^2 \\ &= 0,5.\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

つづく