الإمتحان الوطني الموحد للباكالوريا

الدورة العادية 2016

الموضوع :

التمرين الأول : (2,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) تحقق من أن $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم بين بالترجع أن $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,75
2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المغرفة بما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ. بين أن (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ثم استنتج أن $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,75
ب. بين أن $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم أكتب u_n بدلالة n	0,5
ج. حدد نهاية المتتالية (u_n)	0,5

التمرين الثاني : (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(2,1,3)$ و $B(3,1,1)$ و $C(2,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$

1) أ- بين أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$	0,5
ب- استنتج أن $2x + 2y + z - 9 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0,5
2) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها هو 6	0,5
ب- بين أن $d(\Omega,(ABC)) = 3$ و استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)	0,5
3) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC)	0,5
ب- بين أن مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B	0,5

التمرين الثالث : (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+29=0$	0,75
2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$، النقط Ω و A و B التي ألحاقها على التوالي هي ω و a و b بحيث $\omega=2+5i$ و $a=5+2i$ و $b=5+8i$	
أ- ليكن u العدد العقدي بحيث $u=b-\omega$ تحقق من أن $u=3+3i$ ثم بين أن $\arg u\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$	0,75
ب- حدد عمدة للعدد العقدي $\overline{u}$ ($\overline{u}$ يرمز لمرافق العدد العقدي u)	0,25
ج- تحقق من أن $a-\omega=\overline{u}$ ثم استنتج أن $\Omega A=\Omega B$ و أن $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$	0,75
د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ حدد صورة النقطة A بالدوران R	0,5

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات : أربع كرات حمراء و ست كرات خضراء . (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) . نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق .	
1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " . بين أن $p(A)=\dfrac{2}{15}$	1
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين أ- بين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$	0,5
ب- بين أن $p(X=3)=\dfrac{8}{15}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	1,5

مسألة : (8,5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$ و ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : $1\,cm$)	
I. 1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$	0,25
ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$	0,5
2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	0,5

ب- بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة .	0,5
3) أ- بين أن $f'(x)=2(e^x-1)^2$ لكل x من $\mathbb{R}$	0,5
ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (لاحظ أن $f'(0)=0$)	0,25
ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$	0,75
4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4,+\infty[$ و تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty,\ln 4[$	0,5
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0,-5)$	0,5
ج- أنشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\ln 4\approx 1,4$ و $\alpha\approx 1,3$)	0,75
5) أ- بين أن $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx=-\frac{9}{2}$	0,5
ب- أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln 4$	0,5
.II 1) أ- حل المعادلة التفاضلية $(E): y''-3y'+2y=0$	0,5
ب- حدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$	0,5
2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln 4,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=\ln(e^{2x}-4e^x)$	
أ- بين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} وأن h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$	0,75
ب- تحقق من أن $h(\ln 5)=\ln 5$ ثم حدد $(h^{-1})'(\ln 5)$	0,75

التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

(1

- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-3 &= \frac{3+u_n}{5-u_n}-3 \\ &= \frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n} \\ &= \frac{4u_n-12}{5-u_n} \\ &= \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

-

✓ من أجل $n=0$: لدينا $u_0=2$ إذن $u_0<3$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

- نفترض أن : $u_n<3$
- و نبين أن : $u_{n+1}<3$

لدينا $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

و حسب الإفتراض لدينا : $u_n<3$

إذن $u_n-3<0$ و $3-u_n>0$

إذن : $\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}<0$

و منه $u_{n+1}-3<0$
و بالتالي $u_{n+1}<3$

✓ نستنتج **أن** $u_n<3$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

2) أ- ليكن $n\in\mathbb{N}$:

▪

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}}=\frac{\frac{3+u_n}{5-u_n}-1}{\frac{4(3-u_n)}{5-u_n}}=\frac{\frac{3+u_n-5+u_n}{5-u_n}}{\frac{4(3-u_n)}{5-u_n}}=\frac{2u_n-2}{4(3-u_n)}=\frac{2(u_n-1)}{4(3-u_n)}=\frac{1}{2}\times v_n$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times v_n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{3-u_0}=\frac{2-1}{3-2}=1$

▪ لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

إذن $v_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

▪

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \Leftrightarrow u_n - 1 = (3 - u_n)v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n - 1 = 3v_n - u_n v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n + u_n v_n = 1 + 3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(1 + v_n) = 1 + 3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

إذن : $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

▪ و بما أن $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $u_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1}$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تصحيح التمرين الثاني

(1 **أ-** لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,-2)$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

ب- لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x+(2)y+(1)z+d=0$

و بما أن $A(2,1,3)\in(ABC)$ فإن $(2)(2)+(2)(1)+(1)(3)+d=0$ أي $d=-9$

وبالتالي : $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2) أ- **__طريقة 1:__**

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0\\
&\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+2y+z^2=34\\
&\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2=34+1+1\\
&\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=36\\
&\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(-1))^2+(z-(0))^2=(6)^2
\end{aligned}
$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها هو 6

__طريقة 2:__ معادلة الفلكة الفلكة (S) هي : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$

لدينا : $\begin{cases}\dfrac{-\alpha}{2}=\dfrac{-(-2)}{2}=1\\ \dfrac{-\beta}{2}=\dfrac{-(2)}{2}=-1\\ \dfrac{-\gamma}{2}=\dfrac{-(0)}{2}=0\end{cases}$ إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$

و لدينا : $R=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(0)^2-4(-34)}}{2}=\dfrac{\sqrt{144}}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

إذن شعاع الفلكة (S) هو 6

ب- لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2(1)+2(-1)+(0)-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ ($R=6$ شعاع الفلكة (S))

فإن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3) أ- لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,-1,0)$ و العمودي على المستوى (ABC)

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (ABC)

و لدينا $\Omega(1,-1,0)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=(1)+t(2) \\ y=(-1)+t(2) \\ z=(0)+t(1) \end{cases}$

أي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$

ب- ليكن $H(x_H,y_H,z_H)$ مركز الدائرة (Γ) (H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC))

$$\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2x_H+2y_H+z_H-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow H(x_H,y_H,z_H)\in(\Delta)\cap(ABC)$$

$$\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2(1+2t)+2(-1+2t)+(t)-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = 1 \\ z_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

و منه النقطة H هي B

و بالتالي : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B.

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 29 = 0$

لدينا : $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(29) = -100$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z = \frac{-(-4) - i\sqrt{100}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(-4) + i\sqrt{100}}{2(1)}$$

$$z = \frac{4 - 10i}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{4 + 10i}{2}$$

$$z = 2 - 5i \quad \text{أو} \quad z = 2 + 5i$$

إذن : $S = \{2 - 5i, 2 + 5i\}$

2) أ-

- لدينا $u = b - \omega = (5 + 8i) - (2 + 5i) = 5 + 8i - 2 - 5i = 3 + 3i$

  إذن $u = 3 + 3i$

- لدينا $|u| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

✓ $u = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

إذن $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

ب- نعلم أن $\arg\overline{u} \equiv -\arg u\,[2\pi]$ إذن $\arg\overline{u} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ج-

- $a - \omega = (5 + 2i) - (2 + 5i) = 5 + 2i - 2 - 5i = 3 - 3i = \overline{3 + 3i} = \overline{u}$

- بما أن : $a - \omega = \overline{u}$ فإن $|a - \omega| = |\overline{u}|$

  و نعلم أن $|\overline{u}| = |u|$ إذن $|a - \omega| = |u|$ و منه $|a - \omega| = |b - \omega|$

و بالتالي $\Omega A = \Omega B$

- لدينا $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{u}{\overline{u}}\right)[2\pi]$

إذن $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \arg(u) - \arg\overline{u}\,[2\pi]$

إذن $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{-\pi}{4}\right)[2\pi]$

و منه $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

__طريقة 1:__

بما أن $\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ فإن $\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ و منه $R(A) = B$

__طريقة 2 :__

الكتابة العقدية للدوران R هي $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$

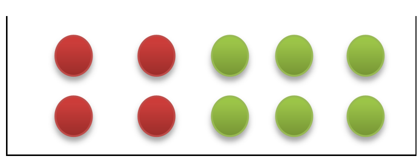
إذن $z' - (2+5i) = i\left(z - (2+5i)\right)$ أي : $z' = iz + 7 + 3i$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

$$z' = ia + 7 + 3i = i(5+2i) + 7 + 3i = 5i - 2 + 7 + 3i = 5 + 8i = b$$

و منه صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B

تصحيح التمرين الرابع



التجربة " نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة .

لدينا $card\,\Omega = C_{10}^{2} = 45$

1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " .

لدينا $cardA = C_4^2 = 6$ إذن $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{6}{45}$ و منه : $p(A) = \dfrac{2}{15}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين

أ. لنحدد القيم التي يأخذها X :

- إذا سحبنا كرتين حمراوتين من الصندوق فإنه يتبقى لنا كرتين حمراوتين في الصندوق إذن $X = 2$
- إذا سحبنا كرة حمراء و كرة خضراء فإنه يتبقى لنا ثلاث كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 3$
- إذا سحبنا كرتين خضراوتين فإنه يتبقى لنا أربع كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 4$

إذن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$

ب.

- $p(X = 3) = \dfrac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \dfrac{4\times 6}{45} = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$
- لنحدد قانون احتمال X :

✓ $p(X = 2) = p(A) = \dfrac{2}{15}$

✓ $p(X = 3) = \dfrac{8}{15}$

✓ $p(X = 4) = \dfrac{C_6^2}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{5}{15}$

x_i	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{5}{15}$

تصحيح المسألة :

I. **1)** أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^{x}=0 \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^{x}=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2) أ- لدينا **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{x}(e^{x}-4)=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-4=+\infty \end{cases}$

ب-

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x}+\frac{e^{2x}-4e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x}+\frac{e^{x}}{x}(e^{x}-4)=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-4=+\infty \end{cases}$

- بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty \end{cases}$ فإن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x)=(2x-2+e^{2x}-4e^{x})'=2+2e^{2x}-4e^{x}=2(e^{2x}-2e^{x}+1)$

إذن : $f'(x)=2(e^{x}-1)^{2}$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f'(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و $x=0\Leftrightarrow f'(x)=0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ج- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$

- ✓ f متصلة على $[1,\ln 4]$
- ✓ f تزايدية قطعا على $[1,\ln 4]$
- ✓ لدينا : $\begin{cases} f(1)=e^2-4e=e(e-4) \\ f(\ln 4)=2\ln(4)-2=2(\ln(4)-1) \end{cases}$ إذن $f(1)\times f(\ln 4)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$

4) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^x=e^x(e^x-4)$

بما أن : $e^x>0$ فإن إشارة $f(x)-(2x-2)$ هي إشارة e^x-4

لدينا : $e^x-4=0 \Leftrightarrow x=\ln 4$

- <u>على المجال $]\ln 4,+\infty[$:</u> $x>\ln 4$

إذن $e^x>4$

إذن $e^x-4>0$

إذن $f(x)-(2x-2)>0$

و منه (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4,+\infty[$

- <u>على المجال $]-\infty,\ln 4[$:</u> $x<\ln 4$

إذن $e^x<4$

إذن $e^x-4<0$

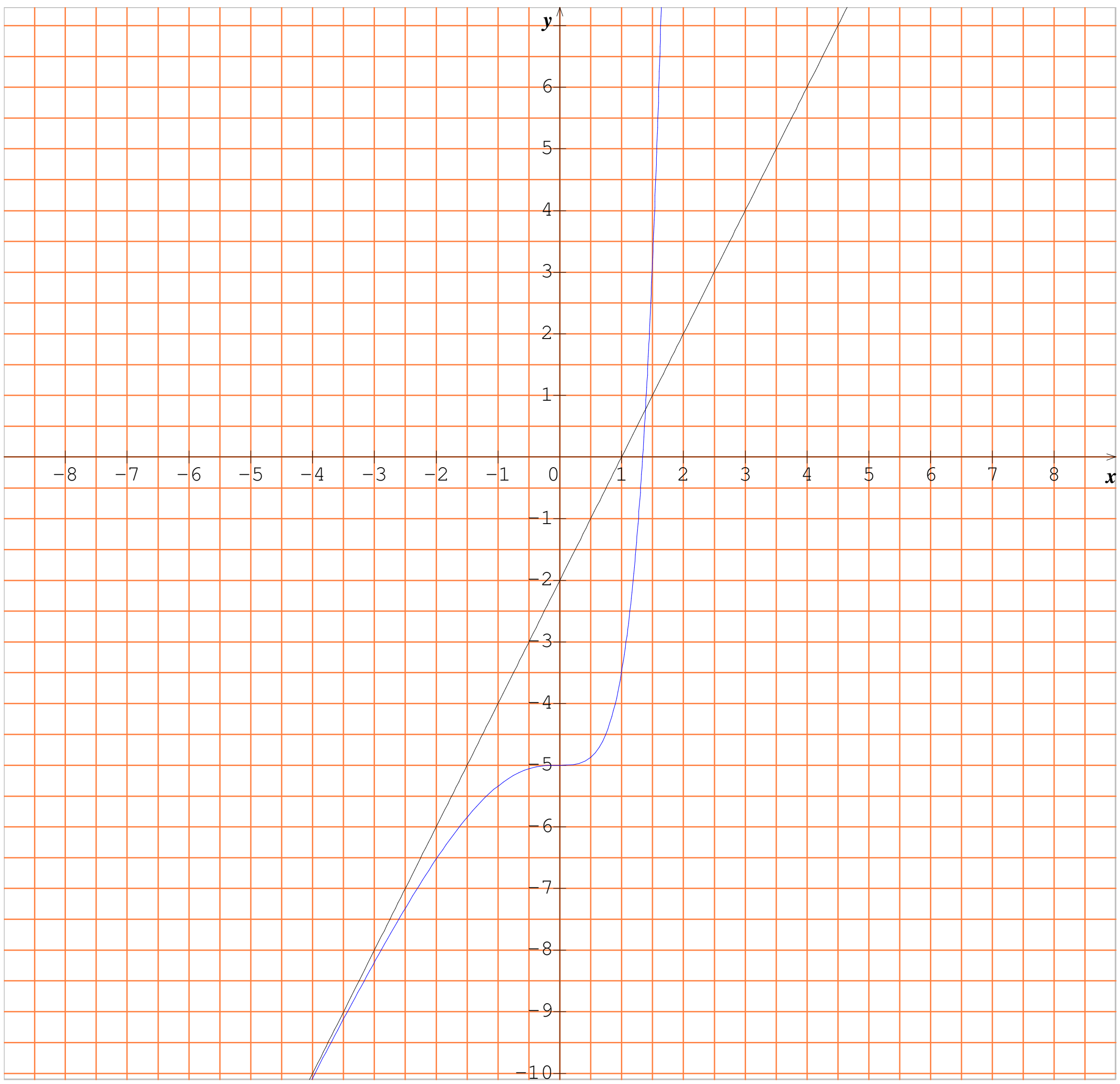
إذن $f(x)-(2x-2)<0$

و منه (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty,\ln 4[$

ب- بما أن f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند العدد 0 فإن النقطة التي زوج إحداثيتيها $(0,f(0))$ هي نقطة انعطاف

و منه المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $\left(0,-5\right)$

ج-



5) أ-

$$\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right) \qquad =\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}\right]_0^{\ln 4}$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-e^{\ln 4}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2(0)}-4e^{0}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times 16-4\times 4\right)-\left(\frac{1}{2}-4\right)$$
$$=8-16-\frac{1}{2}+4$$
$$=-\frac{9}{2}$$

ب- لنحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln 4$:

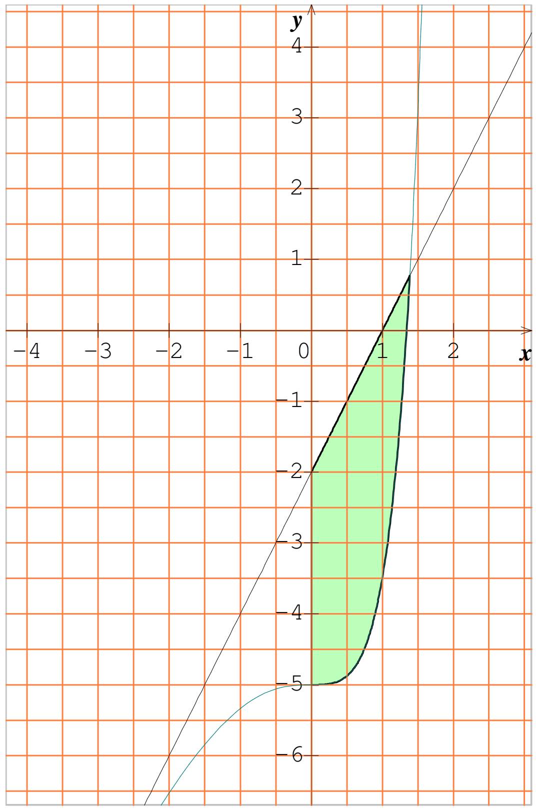
$$A=\int_0^{\ln 4}\left|f(x)-(2x-2)\right|dx\times\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$$

بما أن : على المجال $[0,\ln 4]$: $\qquad f(x)-(2x-2)\leq 0$ فإن :

$$A=\int_0^{\ln 4}\left((2x-2)-f(x)\right)dx\times 1cm\times 1cm$$

إذن $\qquad A=\int_0^{\ln 4}-\left(e^{2x}-e^{x}\right)dx.cm^2$

و منه $\qquad A=\frac{9}{2}.cm^2$



II. 1) أ- لنحل المعادلة التفاضلية $(E): y''-3y'+2y=0$

المعادلة المميزة : $r^2-3r+2=0$

لدينا $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$

إذن حلي المعادلة هما : $r_1=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2(1)}=1$ و $r_2=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2(1)}=2$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$y: x\mapsto \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

أي :

$$y: x\mapsto \alpha e^{x}+\beta e^{2x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

ب- لنحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$

- g حل للمعادلة (E) إذن $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

(حيث α و β سيتم تحديدهما)

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = \alpha e^{x} + 2\beta e^{2x}$
- لدينا : $\begin{cases} g(0) = -3 \\ g'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$

إذن $\alpha = -4$ و $\beta = 1$

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = (-4)e^{x} + (1)e^{2x}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = e^{2x} - 4e^{x}$

2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln 4, +\infty[$ بما يلي :

$$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right) = \ln\left(g(x)\right) = \ln\left(f(x) - (2x - 2)\right)$$

أ-

- لدينا h متصلة على $]\ln 4, +\infty[$

(لأن الدالة g متصلة على $]\ln 4, +\infty[$ و $\left(\forall x \in]\ln 4, +\infty[\right) : g(x) > 0$)

- الدالة h قابلة للإشتقاق على $]\ln 4, +\infty[$

ليكن $x \in]\ln 4, +\infty[$:

$$h'(x) = \left(\ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right)\right)' = \frac{\left(e^{2x} - 4e^{x}\right)'}{e^{2x} - 4e^{x}} = \frac{2e^{2x} - 4e^{x}}{e^{2x} - 4e^{x}} = \frac{2\left(e^{x} - 2\right)}{e^{x} - 4}$$

على المجال $]\ln 4, +\infty[$ لدينا : $e^{x} - 4 > 0$ و $e^{x} - 2 > 0$

إذن $\left(\forall x \in]\ln 4, +\infty[\right) : h'(x) > 0$

و منه الدالة h تزايدية قطعا على $]\ln 4, +\infty[$

بما أن h متصلة وتزايدية قطعا على $]\ln 4, +\infty[$ فإن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من مجال J نحو $]\ln 4, +\infty[$

حيث : $J = h\left(]\ln 4, +\infty[\right) = \left]\lim_{x \to \ln 4^{+}} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

لأن : $\lim_{x \to \ln 4^{+}} h(x) = \lim_{x \to \ln 4^{+}} \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right) = \lim_{t \to 0^{+}} \ln(t) = -\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$

ب-

- لدينا : $h(\ln 5) = \ln\left(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}\right) = \ln(25 - 20) = \ln 5$

إذن : $h(\ln 5)=\ln 5$

▪

- ✓ الدالة h قابلة للإشتقاق في $\ln(5)$
- ✓ و لدينا : $h'(\ln(5))=6$ إذن $h'(\ln(5))\neq 0$

إذن الدالة h^{-1} قابلة للإشتقاق في $h(\ln 5)=\ln 5$

و لدينا : $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)=\left(h^{-1}\right)'\left(h(\ln 5)\right)=\dfrac{1}{h'(\ln 5)}=\dfrac{1}{6}$

إذن : $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)=\dfrac{1}{6}$