Equations différentielles linéaires

1) Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y' = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Définitions :

a) L'équation suivante : $(E): y' = ay + b$ où a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre un , où y est la fonction inconnue.

b) On appelle solution de l'équation différentielle (E), toute fonction f qui vérifie (E).

Propriétés :

- ✓ Les solutions de l' équation $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto \lambda e^{ax}$ où λ est une constante réelle
- ✓ Les solutions de l' équation $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où λ est une constante réelle
- ✓ Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une solution unique de l'équation différentielle $y' = ay + b$ qui vérifie $y(x_à) = y_0$

Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle $(E): y' = 2y$ avec la condition initiale : $y(0) = 1$
   - La solution générale de l'équation différentielle $(E): y' = 2y$ est de la forme

     $y : x \mapsto \lambda e^{2x}$ où λ est une constante réelle

     $$y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda.e^0 = 1$$
     $$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

     Donc la solution cherchée est $x \mapsto e^{2x}$

2. Résoudre l'équation différentielle $(E): y' + 3y = 5$ avec la condition initiale : $y(1) = 2$

   $$y' + 3y = 5 \Leftrightarrow y' = -3y + 5$$

   - La solution générale de l'équation différentielle $(E): y' + 3y = 5$ est de la forme

     $y : x \mapsto \lambda e^{-3x} + \dfrac{5}{3}$ où λ est une constante réelle

$$y(1)=2 \Leftrightarrow \lambda e^{-3}+\frac{5}{3}=2$$
$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{e^{3}}{3}$$

Donc la solution cherchée est $x \mapsto \frac{1}{3}e^{3-3x}+\frac{5}{3}$

2) Equation différentielle linéaire du 2nd ordre : $y''+ay'+by=0$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

Définitions :

a) L'équation suivante : $(E): y''+ay'+by=0$ où a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre , où y est la fonction inconnue et y', y'' ses dérivées.

b) L'équation $r^2+ar+b=0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à $y''+ay'+by=0$

Propriétés :

Résolution de l'équation $(E): y''+ay'+by=0$: soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique

Δ	L'équation caractéristique admet	Les solutions de (E) sont de la forme
$\Delta>0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y: x\mapsto \alpha.e^{r_1.x}+\beta.e^{r_2.x}$
$\Delta=0$	Une seule solution réelle r_0	$y: x\mapsto (\alpha x+\beta).e^{r_0.x}$
$\Delta<0$	Deux solutions complexes conjuguées ; l'une de ces solutions s'écrit sous la forme algébrique : $p+i.q$	$y: x\mapsto (\alpha.\cos(\mathrm{q}\,x)+\beta.\sin(\mathrm{qx})).e^{p.x}$

Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle $(E): \mathrm{y''}-5\,\mathrm{y'}+6\,\mathrm{y}=0$ avec les conditions initiales : $y(0)=1$ et $y'(0)=2$

- L' l'équation caractéristique associée à $(E): \mathrm{y''}-5\,\mathrm{y'}+6\,\mathrm{y}=0$ est : $r^2-5r+6=0$

On a le discriminant de l'équation caractéristique est :

$\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$

Puisque $\Delta>0$ alors L'équation caractéristique admet Deux solutions réelles

$r_1=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)}=2$ et $r_2=r_1=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)}=3$

Et par suite Les solutions de (E) sont de la forme : $y : x \mapsto \alpha.e^{2.x} + \beta.e^{3.x}$

On a $y' : x \mapsto 2\alpha.e^{2.x} + 3\beta.e^{3.x}$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

D'où $y : x \mapsto e^{2.x}$

2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : \mathrm{y}'' - 4\,\mathrm{y}' + 4\,\mathrm{y} = 0$ avec les conditions initiales : $y(0) = 4$ et $y'(\frac{1}{2}) = e$

- L' l'équation caractéristique associée à $(E) : \mathrm{y}'' - 4\,\mathrm{y}' + 4\,\mathrm{y} = 0$ est : $r^2 - 4r + 4 = 0$

  On a le discriminant de l'équation caractéristique est : $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$

  Puisque $\Delta = 0$ alors L'équation caractéristique admet Une seule solution réelle

$$r_0 = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

Et par suite Les solutions de (E) sont de la forme : $y : x \mapsto (\alpha x + \beta).e^{2.x}$

On a $y' : x \mapsto (2\alpha x + (\alpha + 2\beta)).e^{2.x}$

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(\frac{1}{2}) = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ (2\alpha + 2\beta).\mathrm{e} = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-7}{2} \\ \beta = 4 \end{cases}$$

D'où $y : x \mapsto (\frac{-7}{2}x + 4).e^{2.x}$

3. Résoudre l'équation différentielle $(E) : \mathrm{y}'' - 4\,\mathrm{y}' + 13\,\mathrm{y} = 0$ avec les conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 6$

- L' l'équation caractéristique associée à $(E) : \mathrm{y}'' - 4\,\mathrm{y}' + 13\,\mathrm{y} = 0$ est : $r^2 - 4r + 13 = 0$

  On a le discriminant de l'équation caractéristique est :

  $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = -36$ Puisque $\Delta < 0$ alors L'équation caractéristique admet deus solutions complexes conjuguées ; l'une de ces solutions s'écrit sous la forme algébrique : $2 + 3.i$

Et par suite Les solutions de (E) sont de la forme : $y : x \mapsto (\alpha.\cos(3x) + \beta.\sin(3x)).e^{2.x}$

On a : $y(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=0$

Donc $y: x \mapsto \beta.\sin(3x).e^{2.x}$

On a $y': x \mapsto \beta.(3\cos(3x)+2\sin(3x)).e^{2.x}$

On a donc : $y'(0)=6 \quad \Leftrightarrow \quad \beta=2$

D'où $y: x \mapsto 2.\sin(3x).e^{2.x}$

つづく