Bac sciences mathématiques
Série sur les arithmétiques

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que 9 divise $10^n(9n-1)+1$
2) Montrer que 3 divise $7^{n+2}-7^n$

Exercice 2 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13

Exercice 3 :

1) Soit x un élément de $\mathbb{Z}$
   Montrer que le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 appartient à $\{0,1,2,4\}$
2) Montrer que pour tout a et b de $\mathbb{Z}$, on a :
   $7 / a^2+b^2 \Rightarrow (7/\mathrm{a} \quad et \quad 7/b)$

Exercice 4 :

Soit p un entier naturel premier

1) Vérifier que si k est un entier naturel tel que $1 \le k \le p-1$ alors p divise C_p^k
2) En déduire, que pour tout entier n, le nombre $(n+1)^p - n^p - 1$ est divisible par p
3) Démontrer que , quel que soit l'entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p
4) En déduire que $n^{p-1} \equiv 1[p]$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge p = 1$

Exercice 5 :

Soient p un nombre premier positif et n un entier naturel non nul tel que $n \wedge p = 1$

1) Montrer que si p est impair alors : $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$
2) Montrer que $n^{p(p-1)} \equiv 1\left[p^2\right]$

Exercice 6 :

Soit p un nombre premier positif et a un entier naturel non nul tel que $p \wedge a = 1$

On pose $F_p(a) = \dfrac{a^{p-1}-1}{p}$

1) Vérifier que : $F_p(a) \in \mathbb{N}$
2) Soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b \wedge p = 1$

Montrer que : $F_p(ab) \equiv F_p(a)+F_p(a)[p]$

***

Corrigé de l'exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

   On a $10 \equiv 1[9]$ donc $10^n \equiv 1[9]$

   et on a $9n-1 \equiv -1[9]$

   donc $10^n(9n-1) \equiv -1[9]$

   d'où $10^n(9n-1)+1 \equiv 0[9]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   Et par suite $9 \text{ divise } 10^n(9n-1)+1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

   On a $7 \equiv 1[3]$

   Donc $7^{n+2} \equiv 1[3]$ et $7^n \equiv 1[3]$

   Donc $7^{n+2}-7^n \equiv 0[3]$

   Et par suite $3 \text{ divise } 7^{n+2}-7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Corrigé de l'exercice 2

On a $100 \equiv 9[13]$ donc $100^2 \equiv 3[13]$

Et on a $100^3 \equiv 9 \times 3[13]$ donc $100^3 \equiv 1[13]$

Donc $100^{1000} \equiv \left(100^3\right)^{333} \times 100[13]$

D'où $100^{1000} \equiv 9[13]$ $\quad (9<13)$

Et par suite le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13 est le nombre 9

Corrigé de l'exercice 3

1) Soit r le reste de la division euclidienne de x par 7

   On a : $x \equiv r[7]$ donc $x^2 \equiv r^2[7]$

   Puisque $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ alors $r^2 \in \{0,1,4,9,16,25,36\}$

Donc $r^2 \equiv 0[7]$ ou $r^2 \equiv 1[7]$ ou $r^2 \equiv 2[7]$ ou $r^2 \equiv 4[7]$

Et par suite le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 appartient à $\{0,1,2,4\}$

2) Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$

D'après le résultat de la première question , on a :

$a^2 \equiv k[7]$ où $k \in \{0,1,2,4\}$ et $b^2 \equiv k'[7]$ où $k' \in \{0,1,2,4\}$

Le tableau ci-dessous résume le reste de la division euclidienne de a^2+b^2 par 7

$a^2 \diagdown b^2$	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

le reste de la division euclidienne de a^2+b^2 par 7 est égale à 0 en un seul cas : lorsque le reste de la division euclidienne de a^2 est égale à 0 et le reste de la division euclidienne de b^2 est égale à 0.

$a^2+b^2 \equiv 0[7] \Rightarrow \left(a^2 \equiv 0[7] \quad et \quad b^2 \equiv 0[7]\right)$

c.à.d. $7/a^2+b^2 \Rightarrow \left(7/a^2 \quad et \quad 7/b^2\right)$

et puisque 7 est un nombre premier alors on a : $7/a^2+b^2 \Rightarrow \left(7/a \quad et \quad 7/b\right)$

Corrigé de l'exercice 4

1) Soit $k \in \{1,2,......,p-1\}$

On a $C_p^k = \dfrac{p!}{(p-k)!.k!}$ donc $p! = (p-k)!.k!.C_p^k$

Et on a $p/p!$ donc $p/(p-k)!.k!.C_p^k$

Pour tout $k \in \{1,2,......,p-1\}$ on a $p \wedge k = 1$ et $p \wedge (p-k) = 1$

Donc $p \wedge k! = 1$ et $p \wedge (p-k)! = 1$

Et puisque $p/(p-k)!.k!.C_p^k$ alors d'après le théorème de Gauss : p/C_p^k

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k n^k$

Donc : $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k + 1$

On a Pour tout $k \in \{1,2,......,p-1\}$: p / C_p^k c.à.d. $C_p^k \equiv 0[p]$

Donc $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k \equiv 0[p]$

D'où $(n+1)^p \equiv n^p + 1[p]$

Et par suite le nombre $(n+1)^p - n^p - 1$ est divisible par p

3) Montrons par récurrence que : le nombre $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n^p \equiv n[p]$

- ✓ Pour $n = 0$:
  On a $0^p \equiv 0[p]$
- ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$
  - Supposons que $n^p \equiv n[p]$
  - Et montrons que $(n+1)^p \equiv n+1[p]$

    D'après la question 2) on a : $(n+1)^p \equiv n^p + 1[p]$

    Et d'après l'hypothèse de récurrence on : $n^p \equiv n[p]$

    Donc $(n+1)^p \equiv n+1[p]$
- ✓ On déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n^p \equiv n[p]$

4) On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $n^p \equiv n[p]$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $n(n^{p-1}-1) \equiv 0[p]$

Donc $p / n(n^{p-1}-1)$

et puisque $n \wedge p = 1$ alors d'après le théorème de Gauss , on a : $p / n^{p-1} - 1$

donc $n^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$

Et par suite $n^{p-1} \equiv 1[p]$

Corrigé de l'exercice 5

1) On a p est impair donc $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$

Puisque p est premier et $n \wedge p = 1$ alors d'après le théorème de Fermat : $n^{p-1} \equiv 1[p]$

Et on a : $n^{p-1} - 1 = \left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1 = \left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

Puisque $p / n^{p-1}-1$ alors $p / \left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$ ou $p / \left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$

D'où $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$

2) On a $n^{p-1} \equiv 1[p]$ donc il existe α de $\mathbb{N}$ tel que : $n^{p-1}=1+\alpha p$

Donc $n^{p(p-1)}=(1+\alpha p)^{p}=\sum_{k=0}^{p} C_{p}^{k}(\alpha p)^{k}$

Donc $n^{p(p-1)}=1+C_{p}^{1}\alpha p+\sum_{k=2}^{p} C_{p}^{k}(\alpha p)^{k}$

Puisque $\sum_{k=2}^{p} C_{p}^{k}(\alpha p)^{k} \equiv 0\left[p^{2}\right]$ (car : $(2 \leq k \leq p)$ $p^{k} \equiv 0\left[p^{2}\right]$) et $C_{p}^{1}\alpha p \equiv 0\left[p^{2}\right]$

Alors $n^{p(p-1)} \equiv 1\left[p^{2}\right]$

Corrigé de l'exercice 6

1) Puisque p est premier et $p \wedge a=1$ alors d'après le théorème de Fermat :

$a^{p-1} \equiv 1[p]$ c.à.d. $p / a^{p-1}-1$

D'où $\frac{a^{p-1}-1}{p} \in \mathbb{N}$ c.à.d. $F_{p}(a) \in \mathbb{N}$

2) D' après le théorème de Fermat ,on a:

$\begin{cases} a^{p-1} \equiv 1[p] \\ b^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases} \Rightarrow \left(a^{p-1}-1\right)\left(b^{p-1}-1\right) \equiv 0\left[p^{2}\right]$

Donc $(ab)^{p-1}-a^{p-1}-b^{p-1}+1 \equiv 0\left[p^{2}\right]$

Donc $(ab)^{p-1}-1 \equiv \left(a^{p-1}-1\right)+\left(b^{p-1}-1\right)\left[p^{2}\right]$

Donc $\frac{(ab)^{p-1}-1}{p} \equiv \frac{a^{p-1}-1}{p}+\frac{b^{p-1}-1}{p}[p]$

Et par suite : $F_{p}(ab) \equiv F_{p}(a)+F_{p}(a)[p]$

つづく