$2^{ème}$ *bac Sc. Maths*
Les suites numériques

Exercice 1 :

On considère la suite (a_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = (1 - \tan(\frac{\pi}{7}))^n$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

1. Calculer la somme S_n puis déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = Arc\tan(a_n + \tan(u_n)) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

   b) Etudier la monotonie de (u_n), puis déduire que (u_n) est convergente.

   c) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5\pi}{14}$

Exercice 2 :

1. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{9(u_n - 1)} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

   Montrer que (u_n) est croissante
2. On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \sqrt[3]{9(v_n - 1)} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

   Montrer que (v_n) est décroissante
3. Montrer que ; $(\forall (x,y) \in [2,3]^2) \quad f(x) - f(y) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(x-y)$ tel que **:**

   $(x > y) \quad et \quad f(x) = \sqrt[3]{9(x-1)}$
4. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < v_n - u_n < 3^{-\frac{n}{3}}$
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 < v_n \leq 3$
6. Déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite est solution de l'équation $x^3 - 9x + 9 = 0$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \leq 1$
3. Montrer que : $(\forall x \in [0,1]) \quad f(x) \leq x$ et déduire la monotonie de (u_n)
4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
5. Montrer que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Exercice 4 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \quad , v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2+1}$$

1. a) Montrer que (u_n) est croissante
   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_n = n - u_n$
2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $Arc\tan$, **montrer que :**

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n + \frac{1}{1+(n+1)^2} - \frac{1}{2} \leq Arc\tan(n+1) - \frac{\pi}{4} \leq u_n$$

   b) Montrer que (u_n) est convergente et que $\dfrac{\pi}{4} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \dfrac{\pi+2}{4}$

   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 5 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\right)$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Etudier les variations de f et montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{-1}{4} \leq u_n \leq 0$
3. On pose : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$
   a) Montrer que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante
   b) Montrer que : $(\forall x \in \left[\dfrac{-1}{4}, 0\right]) \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$ puis déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{144}|b_n - a_n|$$

   c) Montrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{4}{u_n}) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$
3. Montrer que (u_n) est décroissante et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq \dfrac{5}{2}$
4. a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{u_n})(u_n - 2)$

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{10}(u_n - 2)$

   c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{10}\right)^n \times \dfrac{1}{2}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$

1. En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $x \mapsto \dfrac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}$ dans l'intervalle $[k, k+1]$

   tel que $k \in \{1, 2, ..., n\}$, montrer que : $u_n - \dfrac{1}{n} < \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4n\sqrt[3]{n}} < u_n - \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$
2. Déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8 :

Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = a & , v_0 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} & , v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0 \quad , v_n > 0$
2. Montrer que la suite $(u_n - \text{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante puis déduire v_n en fonction de u_n, a et b
3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont décroissantes et déduire qu'elles sont convergentes .
4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$ et déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq \dfrac{a}{2^n}$
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

6. Etablir que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad \dfrac{u_n}{v_n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2^n}$
7. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \dfrac{u_k}{v_k}\right)$
   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad P_n = \dfrac{v_0}{v_{n+1}}$
   b) Déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$
8. Soit x un réel tel que : $0 < x < 1$.
   Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right)$

Exercice 9 :

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n^2}{n^3+k}$

1. Montrer que : $\left(\forall k \in \{1, 2, ..., n\}\right)\quad \dfrac{n}{n^2+1} \le \dfrac{n^2}{n^3+k} \le \dfrac{n^2}{n^3+1}$
2. Déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\quad \dfrac{n^2}{n^2+1} \le S_n \le \dfrac{n^3}{n^3+1}$
3. Montrer la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite .

Exercice 10 :

On considère les deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 & , v_1 = 2\sqrt{3} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}} & , v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Partie 1 :

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad u_n > 0 \quad , v_n > 0$
   b) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\quad \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \sqrt{\dfrac{u_n + v_n}{2v_n}}$
   c) Déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\quad u_n < v_n$
2. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante
3. Déduire la convergence de (u_n) et (v_n)

Partie 2 :

1. Soit n de $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un réel unique θ_n de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\frac{u_n}{v_n}=\cos(\theta_n)$
2. a) En utilisant la partie 1 - 1)b) , montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$

   b) Déduire que la suite (θ_n) est géométrique et déterminer sa raison

   c) Calculer θ_1 et déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\theta_n=\frac{\pi}{3\times 2^n}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n$
3. a) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$

   b) Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_{n+1}=u_n\times\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}$

   c) Déduire par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n=\pi\times\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n}$

   d) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commun.

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et que : $(\forall x\in[0,1])\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{4\cos^2(1)}$
2. Montrer que : $(\exists!\alpha\in]0,1[)\quad f(\alpha)=\alpha$
3. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0\in]0,1[\\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{1+u_n}\right) \quad (n\in\mathbb{N})\end{cases}$

   a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4\cos^2(1)}\right)^n|u_0-\alpha|$

   b) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

つづく