الثانية علوم تجريبية

الامتحان الوطني 2009 الدورة العادية

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A\left(-2,2,8\right)$ و $B\left(6,6,0\right)$ و $C\left(2,-1,0\right)$ و $D\left(0,1,-1\right)$ و $\left(S\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$	
1) حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ و استنتج أن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(OCD\right)$	0,75
2) تحقق من أن $\left(S\right)$ هي الفلكة التي مركزها $\Omega\left(2,4,4\right)$ و شعاعها 6	0,5
3) أ. أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى $\left(OCD\right)$	0,5
ب. استنتج أن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$	0,5
ج. تحقق من أن : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ ثم استنتج أن النقطة O هي نقطة تماس الفلكة $\left(S\right)$ و المستوى $\left(OCD\right)$	0,75

التمرين الثاني : (3 ن)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$	
1) أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين a و b	1
2) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$	
أ. ليكن z لحق النقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R. بين أن : $z'=bz$	0,75
ب. تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R	0,5
3) بين أن : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\left[2\pi\right]$ ثم حدد عمدة للعدد العقدي c	0,75

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق.	
1) نعتبر الحدثين التاليين : A : " الحصول على ثلاث كرات من اللون " و B : " الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى " بين أن : $P\left(A\right)=\frac{3}{44}$ و $P\left(B\right)=\frac{3}{11}$	1,5
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها .	
أ. حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X	0,25

ب. حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.	1,25

التمرين الرابع : (2 ن)

نضع : $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx$ و $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)dx$	
1) أ. تحقق من أن : $\frac{x}{x+3}=1-\frac{3}{x+3}$ لكل عدد حقيقي x يخالف -3	0,25
ب. بين أن : $I=1-3\ln 2$	0,75
2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $J=-I$	1

التمرين الخامس : (9 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$	
(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$	
I.	
1) تحقق من أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ و أن : $1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$	0,75
2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$ و أول هذه النتيجة هندسيا .	0,75
3) أ. بين : $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و تحقق من أن $f'(0)=0$	1
ب. أدرس إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ و استنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty,0]$	0,5
4) أ. تحقق من أن : $f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right) \quad (\forall x\in\mathbb{R})$	0,25
ب. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0,75
5) أ. تحقق من أن : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$	0,25
ب. أدرس إشارة كل من $\sqrt{e^x}-2$ و $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ على $\mathbb{R}$	0,5
ج. استنتج أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$ لكل x من المجال $[0,\ln 4]$	0,25
د. بين أن $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[0,\ln 4]$	0,75
6) أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما أصغر من -1 و أفصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب و نأخذ $\ln 4\approx 1{,}4$)	0,75
II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$	

يمكنك فيما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f	
1) بين أن : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,75
2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية	0,75
3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.	1

***

تصحيح التمرين الأول :

1) لدينا : $\overrightarrow{OC}(2,-1,0)$ و $\overrightarrow{OD}(0,1,-1)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= (1-0)\vec{i} - ((-1)-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} \\
&= 1.\vec{i} + 2.\vec{j} + 2.\vec{k}
\end{aligned}$$

إذن :

و منه : $\boxed{\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}(1,2,2)}$

لدينا : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}(1,2,2)$ متجهة منظمية للمستوى (OCD)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) تكتب على شكل :

$$1.x + 2.y + 2.z + d = 0$$

و لدينا : $O(0,0,0) \in (OCD)$ إذن $1.(0) + 2.(0) + 2.(0) + d = 0$ و منه : $d = 0$

و بالتالي معادلة (OCD) : $\boxed{x + 2y + 2z = 0}$

2) لدينا : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

إذن : (S) هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$

و منه :

✓ Ω مركز الفلكة (S) هو منتصف القطعة $[AB]$

لدينا : $\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2 \\ y_\Omega = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ z_\Omega = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{8+0}{2} = 4 \end{cases}$ إذن : $\Omega(2,4,4)$

✓ R شعاع (S) :

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(6-(-2))^2 + (6-2)^2 + (0-8)^2}}{2} = \frac{\sqrt{64+16+64}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

3) أ-
$$d(\Omega,(OCD))=\frac{|(2)+2(4)+2(4)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{9}}=6$$

ب- بما أن $d(\Omega,(OCD))=R$ فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S)

ج- لدينا : $\overrightarrow{OA}(-2,2,8)$ و $\overrightarrow{OB}(6,6,0)$

و $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=(-2\times6)+(2\times6)+(8\times0)=0$

إذن : $O\in(S)$

و لينا كذلك $O\in(OCD)$

إذن $O\in(OCD)\cap(S)$

و بما أن (OCD) مماس للفلكة (S) فإن نقطة التماس هي النقطة O

تصحيح التمرين الثاني :

(1

✓

$$\begin{aligned} a &= 2-2i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

2) أ- $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$

$$z' - z_O = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z - z_O)$$
$$z' - 0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z - 0)$$
$$\boxed{z' = b.z}$$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} b.a &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times (2 - 2i) \\ &= -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1 \\ &= \left(1 - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right) \\ &= c \end{aligned}$$

إذن : النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R

(3

$$\arg(c) \equiv \arg(a \times b)[2\pi]$$
$$\boxed{\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)[2\pi]}$$
$$\arg(c) \equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$
$$\boxed{\arg(c) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]}$$

تصحيح لتمرين الثالث :

التجربة " سحب ثلاث كرات في آن واحد من الصندوق "
ليكن Ω كون إمكانيات التجربة
لدينا : $card\Omega = C_{12}^3 = 220$

1) A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

$\boxed{R}\boxed{R}\boxed{R}$ أو $\boxed{N}\boxed{N}\boxed{N}$ أو $\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}$

$$cardA = C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 = 1 + 4 + 10 = 15$$
$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

B " الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى "

$$\boxed{B}\boxed{N}\boxed{R}$$

$$cardB = C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1 = 3\times4\times5 = 60$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها .

أ-

$$\left.\begin{matrix}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}\\ \boxed{N}\boxed{N}\boxed{N}\\ \boxed{R}\boxed{R}\boxed{R}\end{matrix}\right\} \rightarrow \quad X=1$$

$$\left.\begin{matrix}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{\overline{B}}\\ \boxed{N}\boxed{N}\boxed{\overline{N}}\\ \boxed{R}\boxed{R}\boxed{\overline{R}}\end{matrix}\right\} \rightarrow \quad X=2$$

$$\boxed{B}\boxed{N}\boxed{R} \quad \rightarrow \quad X=3$$

القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X : $1,2,3$

ب-

$$p(X=1) = p(A) = \frac{3}{44}$$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2C_9^1 + C_4^2C_8^1 + C_5^2C_7^1}{220} = \frac{3\times9+6\times8+10\times7}{220} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

$$p(X=3) = p(B) = \frac{3}{11}$$

$X = x_i$	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

الأمل الرياضي : $E(X) = \left(1\times\frac{3}{44}\right) + \left(2\times\frac{29}{44}\right) + \left(3\times\frac{3}{11}\right) = \frac{97}{44}$

تصحيح التمرين الرابع :

1) أ. ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

لدينا : $\frac{x}{x+3} = \frac{(x+3)-3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{3}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$

إذن : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ لكل عدد حقيقي x يخالف -3

ب.

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(1-3\frac{(x+3)'}{x+3}\right)dx=\left[x-3\ln\left(|x+3|\right)\right]_{-2}^{-1}=\left(-1-3\ln(2)\right)-\left(-2-3\ln(1)\right)=1-3\ln(2)$$

2) لدينا : $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)dx$

$$\begin{cases}u(x)=\ln(2x+6)\\ v'(x)=1\end{cases} \quad \begin{cases}u'(x)=\dfrac{(2x+6)'}{2x+6}=\dfrac{2}{2x+6}=\dfrac{1}{x+3}\\ v(x)=x\end{cases}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx\\ &= \left(\left(-\ln(4)\right)-\left(-2\ln(2)\right)\right)-I\\ &= -2\ln(2)+2\ln(2)-I\\ &= -I\end{aligned}$$

تصحيح التمرين الخامس :

I. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

1) ليكن $x\in\mathbb{R}$

▷ لدينا : $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\sqrt{e^x}^2-2\sqrt{e^x}+1+1=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$

إذن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ لكل x من $\mathbb{R}$

▷

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x\in\mathbb{R} / e^x-2\sqrt{e^x}+2>0\right\}\\ &= \left\{x\in\mathbb{R} / \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0\right\}\\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

لأن : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

▷ لدينا : $1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}=\frac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}=\frac{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}{e^x}$

بما أن $\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و $e^x>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

فإن : $0<\dfrac{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه : $0<1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

(2

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1=+\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\right)$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$

▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=2\ln(2)=\ln\left(2^2\right)=\ln(4)$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-2\sqrt{e^x}+2=2$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2

▷ (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=\ln(4)$ بجوار $-\infty$

3) أ. بما أن الدالة $u:x\mapsto e^x-2\sqrt{e^x}+2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $0<u(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

فإن الدالة $x\mapsto\ln\left(u(x)\right)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\right)' \\
&= 2\times\frac{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{e^x-2\sqrt{e^x}+2} \\
&= 2\times\frac{e^x-2\dfrac{\left(e^x\right)'}{2\sqrt{e^x}}}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1} \\
&= 2\times\frac{e^x-\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1} \\
&= 2\times\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1} \\
&= \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}
\end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

▷ $f'(0)=\dfrac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0}-1\right)}{\left(\sqrt{e^0}-1\right)^2+1}=\dfrac{2\sqrt{1}\left(\sqrt{1}-1\right)}{\left(\sqrt{1}-1\right)^2+1}=\dfrac{0}{1}=0$

ب. ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sqrt{e^x}-1=0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x}=1\\ &\Leftrightarrow e^x=1\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

▷ إذا كان $x\geq 0$:
لدينا $e^x\geq e^0$
إذن : $e^x\geq 1$
إذن $\sqrt{e^x}\geq 1$
و منه $\sqrt{e^x}-1\geq 0$

▷ إذا كان $x\leq 0$:
لدينا $e^x\leq e^0$
إذن : $e^x\leq 1$
إذن $\sqrt{e^x}\leq 1$
و منه $\sqrt{e^x}-1\leq 0$

○ لدينا : $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

من الواضح أن $\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0$ و $2\sqrt{e^x}>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x}-1$

<u>على المجال</u> $[0,+\infty[$

لدينا : $\sqrt{e^x}-1\geq 0$

إذن : $f'(x)\geq 0$

و منه f تزايدية

<u>على المجال</u> $]-\infty,0]$

لدينا : $\sqrt{e^x}-1\leq 0$

إذن : $f'(x)\leq 0$

و منه f تناقصية

4) أ. ليكن $x\in\mathbb{R}$
لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right) \\ &= 2\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right) \\ &= 2\left(\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right) \\ &= 2\left(x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right) \\ &= 2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right) \end{aligned}$$

إذن :

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=0$

لأن :

($\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}=1$ و "ln" متصلة في 1 $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=0$)

5) أ. ليكن $x\in\mathbb{R}$:
لدينا :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right) &= \sqrt{e^x}^2-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2 \\ &= e^x-3\sqrt{e^x}+2 \end{aligned}$$

إذن : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب. لندرس إشارة $\sqrt{e^x}-2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{e^x}-2=0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x}=2 \\ &\Leftrightarrow e^x=4 \\ &\Leftrightarrow x=\ln(4) \end{aligned}$$

▷ إذا كان $x\geq\ln(4)$:
لدينا $e^x\geq e^{\ln(4)}$

▷ إذا كان $x\leq\ln(4)$:
لدينا $e^x\leq e^{\ln(4)}$

إذن : $e^x \geq 4$
إذن $\sqrt{e^x} \geq 2$
و منه $\sqrt{e^x} - 2 \geq 0$

إذن : $e^x \leq 4$
إذن $\sqrt{e^x} \leq 2$
و منه $\sqrt{e^x} - 2 \leq 0$

لندرس إشارة $\left(\sqrt{e^x}-2\right)\left(\sqrt{e^x}-1\right)$:

x	$-\infty$		0		$ln(4)$		$+\infty$
$\sqrt{e^{(x)}}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{e^{(x)}}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\sqrt{e^{(x)}}-1)(\sqrt{e^{(x)}}-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج. ليكن $x \in [0, \ln 4]$

لدينا : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right) \leq 0$

إذن : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leq 0$

و منه : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ لكل x من المجال $[0, \ln 4]$

د. ليكن $x \in [0, \ln 4]$

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$

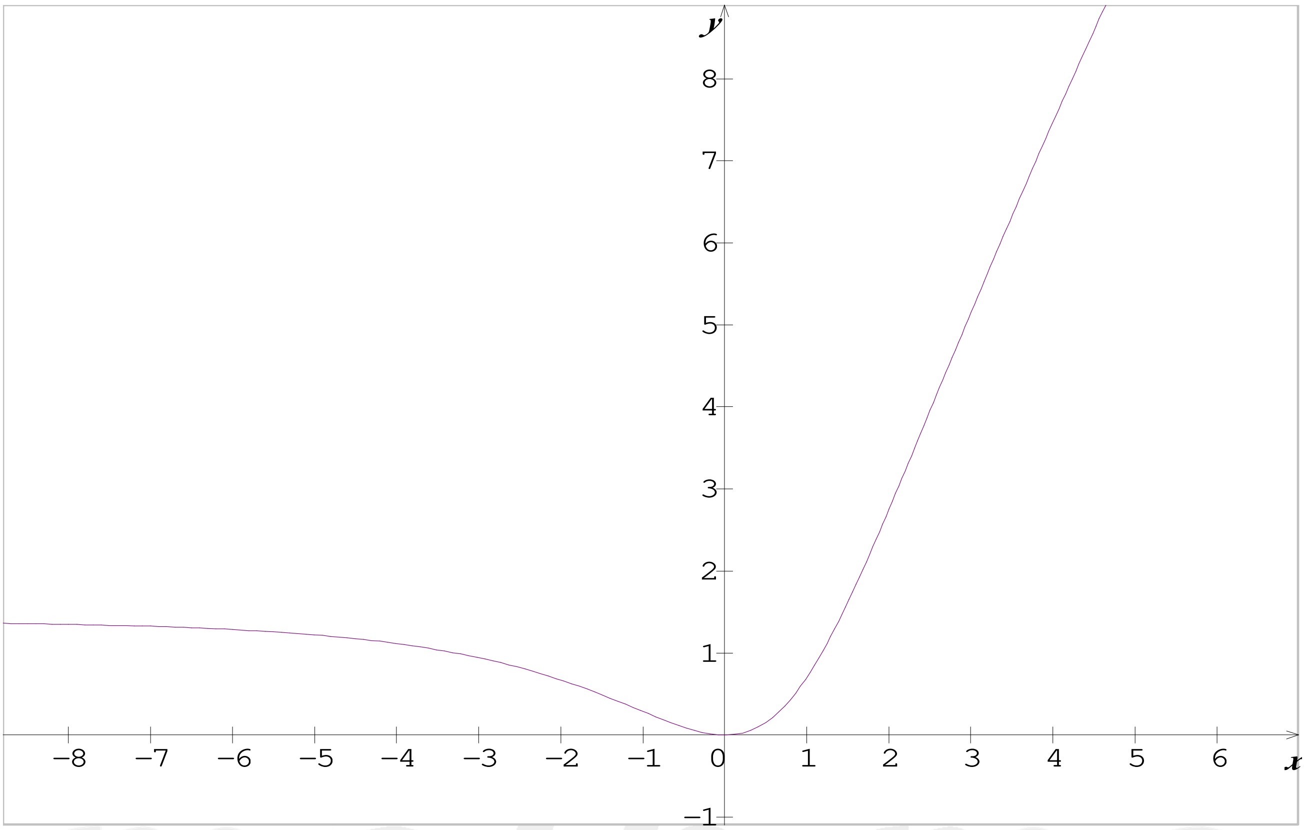
إذن : $\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) \leq \ln\left(\sqrt{e^x}\right)$

إذن : $2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) \leq 2\ln\left(\sqrt{e^x}\right)$

إذن : $2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) \leq \ln\left(e^x\right)$

إذن : $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[0, \ln 4]$

(6



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) لنبين أن : $0\le u_n\le \ln 4$ لكل n من $\mathbb{N}$

▷ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0=1$

إذن $0\le u_0\le \ln 4$

▷ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $0\le u_n\le \ln 4$
- و نبين أن : $0\le u_{n+1}\le \ln 4$

حسب الافتراض لدينا : $0\le u_n\le \ln 4$

و نعلم أن الدالة f متصلة و تزايدية على المجال $\left[0,\ln(4)\right]$

إذن : $f(0)\le f(u_n)\le f(\ln 4)$

و منه : $0\le u_{n+1}\le \ln 4$

▷ نستنتج أن : $0\le u_n\le \ln 4$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) بما أن $f\left(x\right)\leq x$ لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ و بما أن $0\leq u_n\leq \ln 4$ لكل n من $\mathbb{N}$

فإن : $f\left(u_n\right)\leq u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه : $u_{n+1}\leq u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي : المتتالية $\left(u_n\right)$ تناقصية

3) لدينا : $u_0=1\in\left[0,\ln 4\right]$ و $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

▷ f متصلة على المجال $\left[0,\ln\left(4\right)\right]$

▷ $f\left(\left[0,\ln\left(4\right)\right]\right)=\left[0,\ln\left(4\right)\right]$

▷ بما أن المتتالية $\left(u_n\right)$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة

إذن نهاية $\left(u_n\right)$ هي حل للمعادلة $f\left(x\right)=x$

$$\begin{aligned} f\left(x\right)=x &\Leftrightarrow \quad e^x-3\sqrt{e^x}+2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x=1 \quad \text{أو} \quad e^x=4 \\ &\Leftrightarrow \quad x=0 \quad \text{أو} \quad x=\ln\left(4\right) \end{aligned}$$

بما أن $\left(u_n\right)$ تناقصية فإن $u_n\leq u_0$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $u_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\leq 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

つづく