Tronc Commun

Série 1 : Calcul trigonométrique

Exercice 1

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes : $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{55\pi}{3}$

2) a. Déterminer : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$

b. Déterminer : $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{55\pi}{3}\right)$

c. Déterminer : $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$, $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(\frac{55\pi}{3}\right)$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{22}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{14\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)$$

$$C = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(x + 5\pi) + \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \sin(13\pi - x) + \sin\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \cos(x + 9\pi) + \cos(13\pi - x) + \cos(x + 28\pi) + \cos(x)$$

$$C = \tan(x + 11\pi) - \tan\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) - \frac{1}{\cos x . \sin x}$$

Exercice 4

1) On suppose que $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ tel que $\cos x = \frac{2}{5}$. Calculer $\sin x$ et $\tan x$

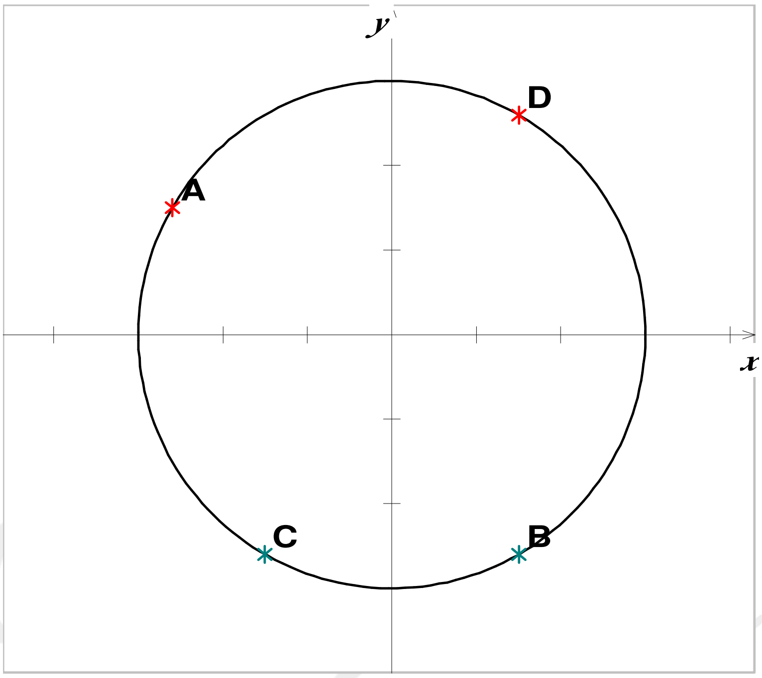
2) On suppose que $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\tan x = \frac{1}{4}$. Calculer $\cos x$ et $\sin x$

3) On suppose que $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$ tel que $\sin x = \frac{-1}{5}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$

***

Corrigé de l'exercice 1 :

1.



2.

a)

- ▷ $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ▷ $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- ▷ $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
- ▷ $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 18\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2(9)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

b)

- ▷ $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

▷ $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

▷ $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

▷ $\sin\left(\frac{55\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2(9)\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c)

▷ $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

▷ $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

▷ $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

▷ $\tan\left(\frac{55\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+18\pi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

Corrigé de l'exercice 2 :

▷ On a :

$$\cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)=\cos^2\left(\frac{11\pi}{22}-\frac{2\pi}{22}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{11}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{22}\right)=\cos^2\left(\frac{11\pi}{22}-\frac{6\pi}{22}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{11}\right)=\sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

Donc :

$$A=\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\cos^2\left(\frac{5\pi}{22}\right)+\cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)=2$$

▷ On a :

$$\sin\left(\frac{14\pi}{13}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{13}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)$$

$$\sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)=\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{13}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)$$

Donc :

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{14\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)=0$$

▷ On a :

$$\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)=\tan\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)=-\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Donc :

$$C=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$$

Corrigé de l'exercice 3 :

▷ $A=\sin(x+5\pi)+\sin\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)+\sin(13\pi-x)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)$

On a :

- $\sin(x+5\pi)=\sin(x+\pi+2(2)\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x$
- $\sin\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+2(2)\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
- $\sin(13\pi-x)=\sin(\pi-x+2(6)\pi)=\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x+2(4)\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$

Donc : $A=2\cos(x)$

▷ $B=\cos(x+9\pi)+\cos(13\pi-x)+\cos(x+28\pi)+\cos(x)$

On a :

- $\cos(x+9\pi)=\cos(x+\pi+2(4)\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
- $\cos(13\pi-x)=\cos(\pi-x+2(6)\pi)=\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
- $\cos(x+28\pi)=\cos(x+2(14)\pi)=\cos(x)$

Donc : $B=0$

▷ $C=\tan(x+11\pi)-\tan\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)-\frac{1}{\cos x.\sin x}$

On a :

- $\tan(x+11\pi)=\tan(x)$

- $\tan\left(\dfrac{15\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x+7\pi\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{\tan x}$
- $\dfrac{1}{\cos x.\sin x}=\dfrac{1}{\cos^2(x)\times\dfrac{\sin x}{\cos(x)}}=\dfrac{1+\tan^2(x)}{\tan x}=\dfrac{1}{\tan x}+\tan x$

Donc $C=\dfrac{-2}{\text{tanx}}$

Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soit $\text{x}\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$, on a :

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

Donc $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{21}{25}$

Donc $\sin x=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ *ou* $\sin x=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

Puisque $\text{x}\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ alors $\sin x\leq 0$

Et par suite $\sin x=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

De plus : $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{21}}{5}}{\dfrac{2}{5}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

2) Soit $\text{x}\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a :

$\cos^2(x)=\dfrac{1}{1+\tan^2(x)}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{16}{17}$

Donc : $\cos x=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$ *ou* $\cos x=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

Puisque $\text{x}\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ alors $\cos(x)\leq 0$

Et par suite $\cos(x)=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

De plus, on sait que $\sin(x)=\cos(x)\times\tan(x)$

Donc $\sin(x)=-\frac{4\sqrt{17}}{17}\times\frac{1}{4}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

3) Soit $x\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right]$

On sait que $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

Donc $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-\left(\frac{-1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$

Donc $\cos x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ *ou* $\cos x=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Puisque $x\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right]$ alors $\cos(x)\geq 0$

Et par suite $\cos(x)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

De plus, on sait que : $\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

Donc $\tan(x)=\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=-\frac{1}{2\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{12}$

つづく