

Tronc Commun

Série 1 : Produit scalaire

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB = \sqrt{7}$, $AC = 2$ et $BC = 3$

1. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$ et montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$
2. On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
 - a. Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$
 - b. Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonales.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 1$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$

1. Trouver la mesure d'angle \widehat{BAC} .
2. Soit I le milieu du segment $[BC]$, calculer BC et en déduire la valeur de AI .

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$

1. Montrer que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{5}$
2. a. calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
b. en déduire que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$
3. Soit H le projeté orthogonal du point A sur $[BC]$. calculer la distance BH .

Exercice 4 :

Soient A et B deux points du plan tel que : $AB = 6$

1. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ tel que I est le milieu du segment $[AB]$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :
 - a. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$
 - b. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$
 - c. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$
 - d. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB = \sqrt{7}$, $AC = 5$ et $BC = 2$

1. montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$.
2. montrer que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.
3. soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) . Calculer la distance AH .
4. soit I le milieu du segment $[BC]$. calculer la distance AI .
5. On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{25}\overrightarrow{AC}$
 - a. Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$
 - b. Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonales.

Corrigé de l'exercice 1 :

1.

▷ D'après le théorème d'Al-kashi, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\text{Donc : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$$

$$\text{Donc : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{(\sqrt{7})^2 + (2)^2 - (3)^2}{2(\sqrt{7}) \times (2)} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

▷ On sait que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\sqrt{7}) \times (2) \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 1$$

2. a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}AC^2 \\ &= \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(2)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} \\
 &= (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} \\
 &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 &= -1 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Donc $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$

Et par suite les droites (MB) et (AC) sont orthogonales .

Corrigé de l'exercice 2 :

1. On sait que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

Donc : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{2\sqrt{3} \times 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc l'une des mesures de l'angle \widehat{BAC} est $\frac{5\pi}{6}$ (150°)

2.

▷ D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc : $BC^2 = (2\sqrt{3})^2 + (1)^2 - 2(-3) = 19$

Et par suite : $BC = \sqrt{19}$

▷ En appliquant le théorème de la médiane , on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \right)$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2} \left((2\sqrt{3})^2 + (1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{19})^2 \right) = \frac{7}{4}$

Et par suite : $AI = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Corrigé de l'exercice 3 :

1. D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\text{Donc : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$$

$$\text{Donc : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{(6)^2 + (5)^2 - (7)^2}{2(6) \times (5)} = \frac{12}{60}$$

$$\text{Et par suite : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{5}$$

2. a) on sait que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\text{donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 5 \times \frac{1}{5}$$

$$\text{et par suite : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= BA^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= BA^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 6^2 - 6 \\ &= 30 \end{aligned}$$

3. on a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC$ (car $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$)

$$\text{donc : } BH = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BC}$$

$$\text{donc : } BH = \frac{30}{7}$$

Corrigé de l'exercice 4 :

1. soit M du plan, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} + \left(\frac{-1}{2} \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}\right) \quad (\text{Car } I \text{ est le milieu du segment} \\ &= MI^2 - \frac{1}{4} AB^2\end{aligned}$$

[AB])

Donc : pour tout point M du plan , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

2. a) on pose $E = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9\}$

$M \in E$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$

Équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = -9$

Équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4} (6)^2 = -9$

Équivaut à $MI = 0$

Et par suite $E = \{I\}$

b) on pose on pose $F = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7\}$

$M \in F$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$

Équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 7$

Équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4} (6)^2 = 7$

Équivaut à $MI^2 = 16$

Équivaut à $MI^2 = (4)^2$

Et par suite F est le cercle de centre I et de rayon 4

c) on pose on pose $G = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12\}$

$M \in G$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$

Équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = -12$

$$\text{Equivalent à } MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = -12$$

$$\text{Equivalent à } MI^2 = -3$$

Et par suite $G = \emptyset$

d) on pose on pose $H = \{M \in P / \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0\}$

$$M \in G \text{ équivaut à } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$$

$$\text{Equivalent à } MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$$

$$\text{Equivalent à } MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = 0$$

$$\text{Equivalent à } MI^2 = (3)^2$$

Et par suite H est le cercle de centre I et de rayon 3

(Rq : $M \in G$ équivaut à $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$)

Et par suite H est le cercle de diamètre $[AB]$)

Corrigé de l'exercice 5 :

1. D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

$$\text{Donc : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\text{Donc : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}((\sqrt{7})^2 + (5)^2 - (2)^2)$$

$$\text{Et par suite : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 14$$

2. On sait que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \times AC}$

$$\text{Donc : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{14}{\sqrt{7} \times 5}$$

$$\text{Et par suite : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

3. Puisque $\overline{AB} \cdot \overline{AC} > 0$ alors $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AH$

$$\text{Donc : } AH = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB}$$

$$\text{Donc : } AH = \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$$

4. En appliquant le théorème de la médiane , on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{Donc : } AI^2 = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \right)$$

$$\text{Donc : } AI^2 = \frac{1}{2} \left((\sqrt{7})^2 + (5)^2 - \frac{1}{2}(2)^2 \right) = 15$$

$$\text{Et par suite : } AI = \sqrt{15}$$

5. a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{12}{25} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{7} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{12}{25} AC^2 \\ &= \frac{1}{7}(14) + \frac{12}{25}(5)^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

b) on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -14 + 14 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$$

Et par suite les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux.

つづく