Bac Economie & Gestion
National 2018

Exercice n°1 : (4,5 pts)

	On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+5$ pour tout n de $\mathbb{N}$
0,5	1. Calculer u_1 et u_2
0,5	2. a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n<15$
0,5	b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+5$
0,25	c. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $-\frac{1}{3}u_n+5>0$
0,5	d. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle est convergente.
	3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-15$
0,5	a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$
0,75	b. Calculer le premier terme v_0 et montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n=(-12)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$
0,5	4. a. Calculer u_n en fonction de n
0,5	b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice n°2 : (4 pts)

	Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges , 3 boules blanches et 2 boules vertes . On tire simultanément au hasard trois boules du sac. On considère les événements suivants : A : « Les trois boules tirées sont blanches » B : « Les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux » C : « Il n'y a aucune boule blanche parmi les trois boules tirées »
0,5	1. a. Montrer que $p(A)=\frac{1}{56}$
1,5	b. Calculer $p(B)$ et $p(C)$
	2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.
1,5	a. Copier et remplir le tableau ci-contre en justifiant les réponses

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$				

0,5	b. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice n°3 : (11,5 pts)

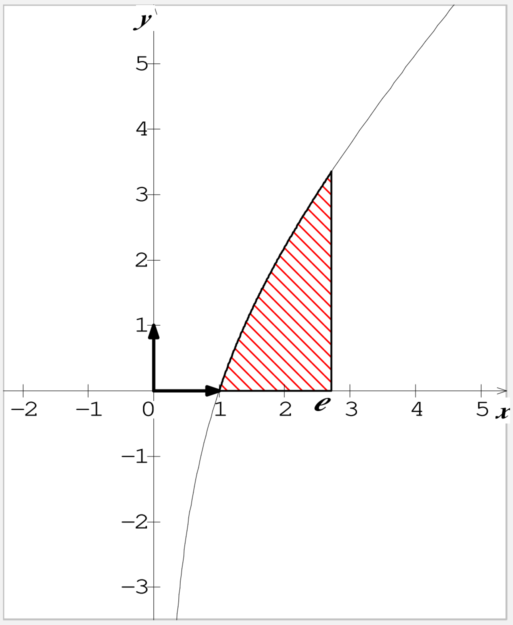
Partie I

	On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par : $$f(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
1	1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat .
0,5	2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
0,75	b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$
1	c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
0,75	3. a. Montrer que : $\forall x>0,\quad f'(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$
0,75	b. Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f
0,5	c. En déduire le signe de f sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$
0,75	d. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1
	4. Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
1	**a.** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \ln(x)dx=1$
1	**b.** Montrer que l'aire de la parie hachurée est égale à $\frac{1}{2}(e^2-1)u.a$ ($u.a$ signifie unité d'aire)

Partie II

	Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par : $$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$$
1	1. Montrer que : $\forall x>0,\quad g'(x)=f(x)$
1	2. En utilisant 3.c de la partie I, montrer que g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

0,5	3. a. Que représente la fonction g pour la fonction f ? (justifier la réponse)
1	b. En déduire, sans calcul, la valeur de $g(e)-g(1)$ (justifier la réponse)



Corrigé de l'exercice n°1 :

1. $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 5 = \frac{2}{3}(3) + 5 = 7$

$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 5 = \frac{2}{3}(7) + 5 = \frac{14}{3} + 5 = \frac{29}{3}$

2. a.

- ✓ Pour $n = 0$:
  On a $u_0 = 3$
  Donc $u_0 < 15$
- ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$
  - Supposons que : $u_n < 15$
  - Et montrons que : $u_{n+1} < 15$?

    On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 15 &= \frac{2}{3}u_n + 5 - 15 \\ &= \frac{2}{3}u_n - 10 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 15) \end{aligned}$$

    D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_n < 15$

    Donc $u_n - 15 < 0$

    Donc $\frac{2}{3}(u_n - 15) < 0$

    Donc $u_{n+1} - 15 < 0$

    D'où $u_{n+1} < 15$
- ✓ On déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 15$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$:

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n \\ &= \left(\frac{2}{3} - 1\right)u_n + 5 \\ &= -\frac{1}{3}u_n + 5 \end{aligned}$$

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 5$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$:

On a $u_n < 15$

Donc $-\frac{1}{3}u_n > -5$

Donc $-\frac{1}{3}u_n + 5 > 0$

Et par suite pour tout n de $\mathbb{N}$: $-\frac{1}{3}u_n + 5 > 0$

d.

- ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$:

  On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 5$ et $-\frac{1}{3}u_n + 5 > 0$

  Donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0$

  D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante

- ✓ Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 15) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. a. soit $n \in \mathbb{N}$:

On a déjà montré que $u_{n+1} - 15 = \frac{2}{3}(u_n - 15)$

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

b.

- ✓ $v_0 = u_0 - 15 = 3 - 15 = -12$

- ✓ On a pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

  Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -12$

  Donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n$

  D'où : pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

4. a. soit $n \in \mathbb{N}$

on a $v_n = u_n - 15$

donc $u_n = v_n + 15$

d'où : pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 15$

b. on a : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-12)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 15 = 15$

Corrigé de l'exercice n°2 :

L'expérience « On tire simultanément au hasard trois boules du sac »
Soit Ω l'univers de cette expérience
$card\Omega = C_8^3 = 56$

1. a. A : « Les trois boules tirées sont blanches »
On a $cardA = C_3^3 = 1$
Donc $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{1}{56}$

b.
- ✓ B : « Les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux »

On a $cardB = C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 3\times3\times2 = 18$
Donc $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

- ✓ C : « Il n'y a aucune boule blanche parmi les trois boules tirées »

On a $cardC = C_5^3 = 10$
Donc $p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.
Les valeurs possibles de X :

$$\boxed{\overline{B}}\boxed{\overline{B}}\boxed{\overline{B}} \rightarrow X = 0$$
$$\boxed{B}\boxed{\overline{B}}\boxed{\overline{B}} \rightarrow X = 1$$
$$\boxed{B}\boxed{B}\boxed{\overline{B}} \rightarrow X = 2$$
$$\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B} \rightarrow X = 3$$

$p(X=0) = p(C) = \frac{5}{28}$

$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{56} = \frac{3\times10}{56} = \frac{15}{28}$

$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{56} = \frac{3\times5}{56} = \frac{15}{56}$

$p(X=3) = p(A) = \frac{1}{56}$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

b. $E(X)=\left(0\times\frac{5}{28}\right)+\left(1\times\frac{15}{28}\right)+\left(2\times\frac{15}{56}\right)+\left(3\times\frac{1}{56}\right)=\frac{9}{8}$

Corrigé de l'exercice n°3 :

Partie I

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-\frac{1}{x}+\ln(x)=-\infty$

Car : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=-\infty\end{cases}$

(C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{1}{x}+\ln(x)=+\infty$

Car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty\end{cases}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}+\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x}=1$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0\end{cases}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+\ln(x)=+\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

3. a. f est dérivable sur $]0,+\infty[$

Soit $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right)' \\ &= 1 - \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc $\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

b. $f(1) = 1 - \frac{1}{1} + \ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$

On a : $\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

Donc $\forall x > 0, \quad f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f'(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

c.

✓ <u>Sur $]0,1]$:</u>

On a $0 < x \leq 1$

Et puisque f est strictement croissante sur $]0,1]$

Alors : $f(x) \leq f(1)$

Et par suite $f(x) \leq 0$

✓ <u>Sur $[1,+\infty[$:</u>

On a $x \geq 1$

Et puisque f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Alors : $f(x) \geq f(1)$

Et par suite $f(x) \geq 0$

d. l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$$
$$y = 3 \times (x-1) + 0$$
$$\boxed{y = 3x - 3}$$

4. a. On a : $\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e \ln(x) \times 1dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \downarrow \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x)dx &= \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}dx \\ &= \left(e\ln(e) - 1\ln(1)\right) - \int_1^e 1dx \\ &= e - [x]_1^e \\ &= e - (e-1) = 1 \end{aligned}$$

b. Calculons l'aire de la parie hachurée :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x)|dx.(u.\text{a}) \\ &= \int_1^e f(x)dx.(u.\text{a}) \qquad (f(x) \geq 0) \\ &= \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right)dx.(u.\text{a}) \\ &= \left(\int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right)dx + \int_1^e \ln x\, dx\right).(u.\text{a}) \\ &= \left(\left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^e + 1\right).(u.\text{a}) \\ &= \left(\left(\frac{e^2}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right) + 1\right).(u.\text{a}) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).(u.\text{a}) \end{aligned}$$

Partie II

1. g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Soit $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{2}\left((x-1)\times(x-1+2\ln x)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[(x-1)'(x-1+2\ln x)+(x-1)(x-1+2\ln x)'\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[x-1+2\ln x+(x-1)\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[x-1+2\ln x+x+2-1-\frac{2}{x}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[2x+2\ln(x)-\frac{2}{x}\right]\\
&= x+\ln(x)-\frac{1}{x}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Donc : $\forall x>0, \quad g'(x)=f(x)$

2.

- ✓ <u>Sur</u> $]0,1]$ <u>:</u> on a $f(x)\leq 0$

  Donc $g'(x)\leq 0$

  D'où g est décroissante sur $]0,1]$
- ✓ <u>Sur</u> <u>$[1,+\infty[$</u> <u>:</u> on a $f(x)\geq 0$

  Donc $g'(x)\geq 0$

  D'où g est croissante sur $[1,+\infty[$

3. a. On a :

- ✓ g est dérivable sur $]0,+\infty[$
- ✓ $\forall x>0, \quad g'(x)=f(x)$

  Donc g est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

b. $g(e)-g(1)=\left[g(x)\right]_1^e=\int_1^e f(x)\,dx=\dfrac{e^2-1}{2}$

つづく