# الثانية علوم تجريبية

# الوطني الاستدراكي 2009

**التمرين الأول : ( 3 ن )**

| | |
|---|---|
| نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقطة $A\left(2,2,-1\right)$ والمستوى $\left(P\right)$ الذي معادلته $2x+y+2z-13=0$ و الفلكة $\left(S\right)$ التي مركزها $\Omega\left(1,0,1\right)$ و شعاعها 3 | |
| 1) أ. بين أن $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة $\left(S\right)$ و تحقق من أن $A$ تنتمي إلى $\left(S\right)$ | 0,75 |
| ب. أحسب مسافة النقطة $\Omega$ عن المستوى $\left(P\right)$ ثم استنتج أن المستوى $\left(P\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$ | 0,75 |
| 2) ليكن $\left(D\right)$ المستقيم المار من النقطة $A$ و العمودي على المستوى $\left(P\right)$ | |
| أ. بين أن $\vec{u}\left(2,1,2\right)$ متجهة موجهة للمستقيم $\left(D\right)$ و أن $\left(6,-6,-3\right)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$ | 0,75 |
| ب. أحسب $\dfrac{\left\Vert\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\Vert}{\left\Vert\vec{u}\right\Vert}$ ثم استنتج أن المستقيم $\left(D\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$ في $A$ | 0,75 |

**التمرين الثاني : ( 3 ن )**

| | |
|---|---|
| 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$ | 1 |
| 2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$ | |
| أ. أحسب $\dfrac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط $A$ و $C$ و $D$ مستقيمية | 0,5 |
| ب. بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة $P$ صورة النقطة $A$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $B$ و نسبته $\dfrac{3}{2}$ | 0,5 |
| ج. أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\dfrac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\dfrac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)$ و أن $PA=\sqrt{2}PD$ | 1 |

**التمرين الثالث : ( 3 ن )**

| | |
|---|---|
| يحتوي صندوق على سبع كرات سوداء و كرتين بيضاوين . ( لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس ) نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق. ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين . | |
| 1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $X$ | 0,5 |
| 2) بين أن : $P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{36}$ و $P\left(X=1\right)=\dfrac{7}{18}$ | 1,5 |

| | |
|---|---|
| 3) اعط قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ و أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ | 1 |

**التمرين الرابع : ( 3 ن )**

| | |
|---|---|
| لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{1+4u_n}{7-2u_n}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | |
| 1) تحقق من أن $1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ثم بين بالترجع أن $1-u_n>0$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | 1 |
| 2) نضع : $v_n=\frac{2u_n-1}{u_n-1}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | |
| أ. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ ثم أكتب $v_n$ بدلالة $n$ | 1 |
| ب. بين أن : $u_n=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ و استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ | 1 |

**التمرين الخامس : ( 2 ن )**

| | |
|---|---|
| 1) حدد الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ على $\mathbb{R}$ و تحقق من أن : $\int_1^{\sqrt{2}}2x\left(x^2-1\right)^{2009}dx=\frac{1}{2010}$ | 1 |
| 2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2(2x+1)\ln(x+1)dx=6\ln 3-2$ | 1 |

**التمرين السادس : ( 6 ن )**

| | |
|---|---|
| لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ | |
| و ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. | |
| 1) أ. تحقق من أن : $f(x)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ | 0,5 |
| ب. بين أن الدالة $f$ زوجية و أن $f(x)-x=\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ | 1 |
| ج. بين أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$ ثم استنتج أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ | 1 |
| 2) بين أن المنحنى $(C)$ يوجد تحت المستقيم $(D)$ على المجال $[0,+\infty[$ | 0,5 |
| 3) أ. بين أن : $f'(x)=\frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ و تحقق من أن : $f'(0)=0$ | 1 |

| | |
|---|---|
| 0,5 | ب. بين أن : $e^{4x}-1\geq 0$ لكل $x$ من $[0,+\infty[$ ثم استنتج أن $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$ لكل $x$ من $[0,+\infty[$ |
| 0,5 | ج. ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $[0,+\infty[$ |
| 1 | 4) أنشئ المنحنى $(C)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( نقبل أن للمنحنى $(C)$ نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب). |

## تصحيح التمرين الأول :

1) أ-

✓ لدينا $(S)$ هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها $R=3$

معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ هي :

$$(x-(1))^2+(y-(0))^2+(z-(1))^2=(3)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=9$$
$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0}$$

✓ لنتحقق أن $A\in(S)$

لدينا : $A(2,2,-1)$

$$(2)^2+(2)^2+(-1)^2-2(2)-2(-1)-7=4+4+1-4+2-7=0$$

إذن : $A\in(S)$

ب- $$d(\Omega,(P))=\frac{|2(1)+(0)+2(1)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

بما أن $d(\Omega,(P))=R$ فإن $(P)$ مماس للفلكة $(S)$

2) أ- ليكن $(D)$ المستقيم المار من النقطة $A$ و العمودي على المستوى $(P)$

✓ لدينا : $(D)\perp(P)$ و $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة منظمية للمستوى $(P)$

إذن $\vec{u}(2,1,2)$ هي متجهة موجهة للمستقيم $(D)$

✓ لدينا : $\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)$ و $\vec{u}(2,1,2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u} &= \begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= ((4)-(-2))\vec{i}-((2)-(-4))\vec{j}+((1)-(4))\vec{k}\\ &= 6\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}\end{aligned}$$

إذن $(6,-6,-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$

ب-

✓ $$\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{(6)^2+(-6)^2+(-3)^2}}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(2)^2}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=3$$

✓ لدينا : $$d(\Omega,(D))=\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=3$$

بما أن $d(\Omega,(D))=R$ فإن $(D)$ مماس للفلكة $(S)$

و بما أن $A\in(D)\cap(S)$ فإن نقطة تماس $(D)$ و $(S)$ هي النقطة $A$

## تصحيح التمرين الثاني :

1)

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$

$$\Delta=(-6)^2-4(1)(25)=36-100=-64$$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{-(-6)-i\sqrt{64}}{2(1)}=\frac{6-8i}{2}=3-4i \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(-6)+i\sqrt{64}}{2(1)}=\frac{6+8i}{2}=3+4i$$

إذن : $S=\{3-4\text{i};3+4i\}$

2)

أ- $\dfrac{d-c}{a-c}=\dfrac{(5+6i)-(2+3i)}{(3+4i)-(2+3i)}=\dfrac{3+3i}{1+i}=\dfrac{3(1+i)}{1+i}=3$

بما أن $\dfrac{d-c}{a-c}\in\mathbb{R}$ فإن النقط $A$ و $C$ و $D$ مستقيمية

ب- لنحدد $p$ لحق النقطة $P$ صورة النقطة $A$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $B$ و نسبته $\dfrac{3}{2}$

لدينا : $p-b=\dfrac{3}{2}(a-b)$

إذن : $p=\dfrac{3}{2}(a-b)+b$

إذن : $p=\dfrac{3}{2}((3+4i)-(3-4i))+3-4i$

إذن : $p=12i+3-4i=3+8i$

و منه : $\boxed{p=3+8i}$

ج-

✓ لدينا : $\dfrac{d-p}{a-p}=\dfrac{(5+6i)-(3+8i)}{(3+4i)-(3+8i)}=\dfrac{2-2i}{-4i}=\dfrac{-2i(1+i)}{-2i(2)}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

إذن : $\dfrac{d-p}{a-p}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

✓ لدينا : $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{d-p}{a-p}\right)[2\pi]$

إذن : $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

✓ لدينا : $\left|\dfrac{d-p}{a-p}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : $\dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

و منه : $PA = \sqrt{2}PD$

## تصحيح التمرين الثالث :

التجربة " سحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من الصندوق "

ليكن $\Omega$ كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\Omega = A_9^2 = 72$

**1)** $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين .

$$\boxed{B}\boxed{B} \rightarrow X = 0$$

$$\left.\begin{matrix}\boxed{B}\boxed{N} \\ \boxed{N}\boxed{B}\end{matrix}\right\} \rightarrow X = 1$$

$$\boxed{N}\boxed{N} \rightarrow X = 2$$

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $X$ : $0,1,2$

**2)** $$p(X=0) = \frac{A_2^2}{72} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

$$p(X=1) = \frac{2\left(A_2^1 \times A_7^1\right)}{72} = \frac{2\times2\times7}{72} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

**3)** $$p(X=2) = \frac{A_7^2}{72} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{7}{18}$ | $\frac{7}{12}$ |

الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(0\times\frac{1}{36}\right) + \left(1\times\frac{7}{18}\right) + \left(2\times\frac{7}{12}\right) = \frac{56}{36} = \frac{14}{9}$$

## تصحيح التمرين الرابع :

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

1)

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا : $1-u_{n+1}=1-\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}=\dfrac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n}=\dfrac{6-6u_n}{7-2u_n}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2-2u_n}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$

إذن : $1-u_{n+1}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

✓

- من أجل $n=0$ :

  لدينا : $1-u_0=1$

  إذن : $1-u_0>0$

- ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

  - نفترض أن : $1-u_n>0$
  - و نبين أن : $1-u_{n+1}>0$ ؟

  لدينا : $1-u_{n+1}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$

  و حسب الافتراض $1-u_n>0$ إذن : $\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}>0$

  إذن : $1-u_{n+1}>0$

- نستنتج أن : $1-u_n>0$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

2) لدينا : $v_n=\dfrac{2u_n-1}{u_n-1}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

أ-

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1}=\dfrac{2\left(\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}\right)-1}{\left(\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}\right)-1}=\dfrac{\dfrac{2+8u_n-7+2u_n}{7-2u_n}}{\dfrac{1+4u_n-7+2u_n}{7-2u_n}}=\dfrac{-5+10u_n}{-6+6u_n}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2u_n-1}{u_n-1}=\dfrac{5}{6}\times v_n$

إذن : $v_{n+1}=\dfrac{5}{6}\times v_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

و منه : $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ و حدها الأول : $v_0=\frac{2u_0-1}{u_0-1}=\frac{2(0)-1}{(0)-1}=1$

✓ لنكتب $v_n$ بدلالة $n$ :

$$v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{5}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

إذن : $v_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ب-

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا :

$$\begin{aligned} v_n=\frac{2u_n-1}{u_n-1} &\Leftrightarrow 2u_n-1=u_nv_n-v_n \\ &\Leftrightarrow 2u_n-u_nv_n=1-v_n \\ &\Leftrightarrow u_n(2-v_n)=1-v_n \\ &\Leftrightarrow u_n=\frac{1-v_n}{2-v_n} \end{aligned}$$

إذن : $u_n=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

✓ بما أن : $-1<\frac{5}{6}<1$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}=\frac{1}{2}$

## تصحيح التمرين الخامس :

**1)** لدينا : $h:x\mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن : $h$ تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

$$h(x)=2x\left(x^2-1\right)^{2009}=\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^{2009}$$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $h$ : $x \mapsto \frac{\left(x^2-1\right)^{2009+1}}{2009+1}+c \quad (c\in\mathbb{R})$

$$x \mapsto \frac{\left(x^2-1\right)^{2010}}{2010}+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}dx=\left[\frac{\left(x^2-1\right)^{2010}}{2010}\right]_1^{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2010}+c\right)-(0+c)=\frac{1}{2010} \quad \checkmark$$

**2)** لنحسب : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx$

$$\begin{cases} u(x)=\ln(x+1) \\ v'(x)=2x+1 \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}=\frac{1}{x+1} \\ v(x)=x^2+x=x(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx &= \left[\left(x^2+x\right)\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\frac{x(x+1)}{x+1}dx \\ &= 6\ln(3)-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \\ &= 6\ln(3)-2 \end{aligned}$$

## تصحيح التمرين السادس :

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

**(1**

أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

لدينا :

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) &= x\left(\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}\right) \\ &= x\left(\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\right) \\ &= x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن : $f(x)=x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$

ب-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

- لدينا : $-x\in\mathbb{R}$
- و لدينا :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) \\ &= \frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة $f$ زوجية

✓

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)-x \\ &= x\left[\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}-1\right] \\ &= x\left[\frac{1-e^{-2x}-1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right] \\ &= \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{aligned}$$

ج-

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-e^{t}}{1+e^{t}}=1$ $\left(\begin{array}{c} t=-2x \\ x\to+\infty \\ t\to-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0 \end{array}\right)$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{te^{t}}{1+e^{t}}=0$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t}=0 \\ \lim\limits_{t\to-\infty} 1+e^{t}=1 \end{cases}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$

✓ إذن : المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$

**2)** ليكن $x\in[0,+\infty[$ :

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

بما أن $1+e^{-2x}>0$ و $e^{-2x}>0$ و $-2x\leq 0$ فإن $\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\leq 0$

و منه $f(x)-x\leq 0$

و بالتالي : المنحنى $(C)$ يوجد تحت المستقيم $(D)$ على المجال $[0,+\infty[$

**3)**

أ- $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right)' \\
&= (x)'\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)+x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)' \\
&= 1\times\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)+x\times\frac{\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right)+\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\
&= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+x\times\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\
&= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+x\times\frac{2e^{2x}\times 2}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)+x\times 4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\
&= \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}
\end{aligned}$$

✓

$$f'(0)=\frac{e^{0}-1+4(0)e^{0}}{\left(e^{0}+1\right)^2}=\frac{1-1+0}{(1+1)^2}=0$$

ب- ليكن $x\in[0,+\infty[$ :

✓ لدينا : $x\geq 0$

إذن : $4x\geq 0$

إذن : $e^{4x} \geq e^{0}$

إذن : $e^{4x} \geq 1$

و منه : $e^{4x}-1 \geq 0$ لكل $x$ من $[0,+\infty[$

✓ لدينا : $e^{4x}-1 \geq 0$ و $4xe^{2x} \geq 0$

إذن : $e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$ لكل $x$ من $[0,+\infty[$

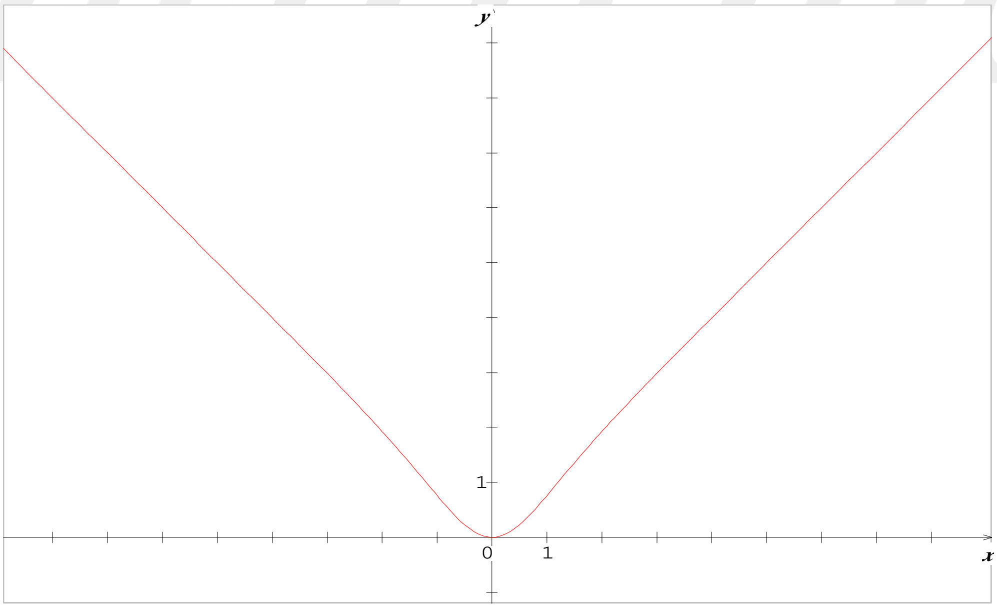
ج- لدينا : $e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$ و $\left(e^{2x}+1\right)^2 > 0$

إذن : $f'(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \geq 0$ لكل $x$ من $[0,+\infty[$

<u>جدول تغيرات الدالة $f$ على $[0,+\infty[$ :</u>

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $\quad$ $+$ |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $+\infty$ |

**(4**




つづく