الثانية علوم تجريبية

الوطني الاستدراكي 2008

التمرين الأول : (3 ن)

1	1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$
	2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$، النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما: $a=4+i$ و $b=8+3i$ ليكن z لحق النقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Ω التي لحقها هو $\omega=1+2i$ و زاويته هي $\dfrac{3\pi}{2}$
0,75	أ. بين أن : $z'=-iz-1+3i$
0,5	ب. تحقق من أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$
0,75	ج. بين أن: $b-c=2(a-c)$ ثم استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية

التمرين الثاني : (3 ن)

	نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوى (P) الذي معادلته هي : $x+2y+z-1=0$ و الفلكة (S) التي معادلتها هي : $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$
0,75	1) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $I(2,3,-1)$ و أن شعاعها هو 3
0,5	2) أ. بين أن مسافة النقطة I عن المستوى (P) هي $\sqrt{6}$
0,75	ب. استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها هو $\sqrt{3}$
0,5	3) أ. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من I و العمودي على (P)
0,5	ب. بين أن مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(1,1,-2)$

التمرين الثالث : (3 ن)

	يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق
1	1) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء
1	2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\dfrac{1}{7}$
1	3) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل

التمرين الرابع : (3 ن)

	لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$
1	1) بين أن : $u_n>1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) نضع : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n	1
ب. بين أن : $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)	1

التمرين الخامس : (8 ن)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{2x} - 2x$	
1) أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$	1
2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (لاحظ أن $g(0) = 1$)	0,75
II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.	
1) أ. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	0,5
ب. تحقق من أن $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$	0,25
ج. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$)	0,5
د. استنتج أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه	0,25
2) أ. لكل x من $]0,+\infty[$ ، تحقق من أن $1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ و أن $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$	0,75
ب. استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$)	0,5
ج. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0,5
د. بين أن : $f(x) - 2x \leq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن (C) يوجد تحت (D) على المجال $[0,+\infty[$	0,75
3) أ. بين أن : $f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x} - 1\right)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$	0,75
ب. أدرس إشارة $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f	0,5
4) أنشئ (D) و (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف)	1

تصحيح التمرين الأول :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$

لدينا $\Delta=(-8)^2-4(1)(17)=64-68=-4$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 بحيث :

$$z_1=\frac{-(-8)-i\sqrt{4}}{2(1)} \quad , \quad z_2=\frac{-(-8)+i\sqrt{4}}{2(1)}$$

$$z_1=\frac{8-2i}{2} \quad , \quad z_2=\frac{8+2i}{2}$$

$$z_1=4-i \quad , \quad z_2=4+i$$

وبالتالي : $S=\{4-i,4+i\}$

2) أ. لتكن M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Ω التي لحقها هو $\omega=1+2i$ و زاويته هي $\frac{3\pi}{2}$

الكتابة العقدية للدوران R هي : $z'-\omega=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-\omega)$

لنحسب $e^{i\frac{3\pi}{2}}$:

$$e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-(0)-i(1)=-i$$

إذن : $z'-(1+2i)=-i\big(z-(1+2i)\big)$

إذن : $z'-1-2i=-i(z-1-2i)$

إذن : $z'-1-2i=-iz+i-2$

و بالتالي : $z'=-iz-1+3i$

ب. لنتحقق من أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$

$$\begin{aligned} c &= -ia-1+3i \\ &= -i(4+i)-1+3i \\ &= -4i+1-1+3i \\ &= -i \end{aligned}$$

ج. لدينا : $b-c=(8+3i)-(-i)=8+4i$ و $2(a-c)=2\big((4+i)-(-i)\big)=2(4+2i)=8+4i$

إذن $b-c=2(a-c)$

لدينا $b-c=2(a-c)$ إذن $\frac{b-c}{a-c}=2$

بما أن $\dfrac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية

تصحيح التمرين الثاني :

1) لدينا :

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z) \in S \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-4x+y^2-6y+z^2+2z=-5 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-2(2)x+(2)^2+y^2-2(3)y+(3)^2+z^2+2(1)z+(1)^2=-5+(2)^2+(3)^2+(1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-(2))^2+(y-(3))^2+(z-(-1))^2=(3)^2
\end{aligned}
$$

إذن مركز الفلكة (S) هي النقطة $I(2,3,-1)$ و شعاعها هو $R=3$

2) أ. $d(I,(P))=\dfrac{|(2)+2(3)+(-1)-1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|6|}{\sqrt{6}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

ب. بما أن $d(I,(P))<R$ فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها :

$$r=\sqrt{R^2-\left(d(I,(P))\right)^2}=\sqrt{(3)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$$

3) أ. لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من I و العمودي على (P)

لدينا $(D)\perp(P)$ و $\vec{n}(1,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (P)

إذن $\vec{n}(1,2,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

و $I(2,3,-1)\in(D)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x=(2)+t(1) \\ y=(3)+t(2) \\ z=(-1)+t(1) \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

أي : $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

ب. H مركز الدائرة (Γ) هو المسقط العمودي للنقطة I على المستوى (P) إذن H هي نقطة تقاطع (D) و المستوى (P)

لدينا :

$$H(x,y,z)\in(D)\cap(P) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \\ (2+t)+2(3+2t)+(-1+t)-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \\ t=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+(-1)=1 \\ y=3+2(-1)=1 \\ z=-1+(-1)=-2 \\ t=-1 \end{cases}$$

إذن مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(1,1,-2)$

تصحيح التمرين الثالث :

التجربة : " سحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا $card\Omega = A_7^3 = 210$

1) ليكن الحدث A " الحصول على ثلاث كرات بيضاء " B,B,B

لدينا : $cardA = A_4^3 = 24$

إذن : $p(A)=\dfrac{cardA}{card(\Omega)}=\dfrac{24}{210}=\dfrac{4}{35}$

2) ليكن الحدث B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " R,R,R أو B,B,B

لدينا : $cardB = A_4^3 + A_3^3 = 24+6=30$

إذن : $p(B)=\dfrac{cardA}{card(\Omega)}=\dfrac{30}{210}=\dfrac{1}{7}$

3) ليكن الحدث C " الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل "

$\overline{C}$ " عدم الحصول على أية كرة بيضاء " بمعنى " الحصول على ثلاث كرات حمراء " R,R,R

لدينا : $card\overline{C} = A_3^3 = 6$ إذن $p\left(\overline{C}\right) = \dfrac{card\overline{C}}{card\Omega} = \dfrac{6}{210} = \dfrac{1}{35}$

و منه : $p(C) = 1 - p\left(\overline{C}\right) = 1 - \dfrac{1}{35} = \dfrac{34}{35}$

تصحيح التمرين الرابع :

1)

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 2$

إذن $u_0 > 1$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

- نفترض أن : $u_n > 1$
- و نبين أن : $u_{n+1} > 1$ ؟

لدينا :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n}{2u_n+3} - 1 = \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n+3} = \frac{3u_n - 3}{2u_n+3} = \frac{3(u_n - 1)}{2u_n+3}$$

حسب الافتراض : $u_n > 1$

إذن $u_n - 1 > 0$ و منه $3(u_n - 1) > 0$

و كذلك $2u_n + 3 > 5$ و منه $2u_n + 3 > 0$

إذن : $\dfrac{3(u_n-1)}{2u_n+3} > 0$

إذن $u_{n+1} - 1 > 0$

و منه $u_{n+1} > 1$

✓ نستنتج : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3(u_n-1)}{2u_n+3}}{\dfrac{5u_n}{2u_n+3}} = \frac{3}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n} = \frac{3}{5} \times v_n$$

إذن : $v_{n+1} = \dfrac{3}{5} \times v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{5}$ و حدها الأول : $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

إذن: $v_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
v_n=\frac{u_n-1}{u_n} &\Leftrightarrow \quad u_n-1=u_nv_n\\
&\Leftrightarrow \quad u_n-u_nv_n=1\\
&\Leftrightarrow \quad u_n(1-v_n)=1\\
&\Leftrightarrow \quad u_n=\frac{1}{1-v_n}\\
&\Leftrightarrow \quad u_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n}
\end{aligned}$$

إذن : $u_n=\frac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ بما أن $-1<\frac{3}{5}<1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{2}{2}=1$

تصحيح التمرين الخامس :

I.

1) g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(e^{2x}-2x\right)'\\
&= 2e^{2x}-2\\
&= 2\left(e^{2x}-1\right)
\end{aligned}$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g'(x)=2\left(e^{2x}-1\right)$

لدينا :
$$\begin{aligned} g'(x)=0 &\Leftrightarrow e^{2x}-1=0\\ &\Leftrightarrow e^{2x}=1\\ &\Leftrightarrow 2x=0\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{(2x)}-1$	$-$	0	$+$

✓ على المجال $[0,+\infty[$: $e^{2x}-1\geq 0$

إذن : $g'(x)\geq 0$

إذن g تزايدية

✓ على المجال $]-\infty,0]$: $e^{2x}-1\leq 0$

إذن : $g'(x)\leq 0$

إذن : g تناقصية

2) لدينا g تناقصية على المجال $]-\infty,0]$ و g تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ إذن $g(0)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)\geq g(0)$

ولدينا : $g(0)=1$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)\geq 1$

و منه : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)>0$

II

1) أ-
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}-2x\right)=+\infty$$

لأن :
$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-2x=\lim_{x\to+\infty}2x\left(\frac{e^{2x}}{2x}-1\right)=+\infty$$

و :
$$\lim_{t\to+\infty}\ln(t)=+\infty$$

ب- ليكن x من $\mathbb{R}^*$

لدينا :
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln\left(e^{2x}-2\right)}{x}=\left(\frac{e^{2x}-2x}{x}\right)\times\left(\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}\right)=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$

إذن : $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

ج- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}e^{2x}-2\right)=-2$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$)

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$ $\begin{pmatrix} t=e^{2x}-2x \\ x\to-\infty \\ t\to+\infty \end{pmatrix}$

د- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

إذن : المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

2)

أ- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

✓ لدينا : $1-\frac{2x}{e^{2x}}=\frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}}=\frac{g(x)}{e^{2x}}$

بما أن $g(x)>0$ و $e^{2x}>0$ فإن : $\frac{g(x)}{e^{2x}}>0$

و منه : لكل x من $[0,+\infty[$: $1-\frac{2x}{e^{2x}}>0$

✓ $2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=2x+\ln\left(\frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}}\right)=2x+\ln\left(e^{2x}-2x\right)-\ln\left(e^{2x}\right)=2x+\ln\left(e^{2x}-2x\right)-2x=\ln\left(e^{2x}-2x\right)=f(x)$

و منه : لكل x من $[0,+\infty[$: $2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=f(x)$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=+\infty$

لأن :

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

✓ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1-\frac{u}{e^{u}}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{e^{u}}{u}}\right)=1$ و الدالة "ln" متصلة في 1

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=\ln(1)=0$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)=0$

إذن : المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f(x)-2x=\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$

✓ إذا كان : $x\geq 0$

لدينا : $-\dfrac{2x}{e^{2x}}\leq 0$

إذن : $0<1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\leq 1$

إذن : $\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)\leq 0$

إذن : $f(x)-2x\leq 0$

و منه : (C) يوجد تحت (D)

✓ إذا كان : $x\leq 0$

لدينا : $-\dfrac{2x}{e^{2x}}\geq 0$

إذن : $1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\geq 1$

إذن : $\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)\geq 0$

إذن : $f(x)-2x\geq 0$

و منه : (C) يوجد فوق (D)

3) أ- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأن $f=\ln(g)$: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $0<g(x)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$)

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x)=(\ln(g))'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

إذن : $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$

و نعلم أن $g(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $e^{2x}-1$

و لدينا :

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$e^{(2x)}-1$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

إذن : على المجال $[0,+\infty[$: $f'(x)\geq 0$ و على المجال $]-\infty,0]$: $f'(x)\leq 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

(4