الثانية علوم رياضية

الوطني الاستدراكي 2017

التمرين 1 : $4,5$ ن

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية و غير كاملة .	
نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ و $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$ لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$	
و $E=\left\{\mathrm{M}(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$	
1. بين أن E فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ بعده 2	$0,75$
2. أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$	$0,5$
ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية	$0,75$
3. نضع $E^*=E\setminus\left\{M(0,0)\right\}$ و نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad \varphi(x+iy)=M\left(x,\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)$	
أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$	$0,75$
ب) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية .	$0,5$
ج) بين أن : $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}i\right)$ ثم حدد مقلوب المصفوفة J^{2017} في $(E^*,\times)$	$0,75$
4. بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.	$0,5$

التمرين 2 : 3 ن

يحتوي كيس على $2n$ كرة (n من $\mathbb{N}^*$) ، منها n كرة بيضاء و n كرة سوداء. جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.	
تقتضي لعبة سحب كرة واحدة من الكيس و تسجيل لونها و إعادتها إلى الكيس ثم سحب كرة أخرى من نفس الكيس و تسجيل لونها كذلك .	
قانون اللعبة هو كما يلي :	
ـ إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أبيض ، نربح 20 نقطة	
ـ إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أسود ، نخسر 20 نقطة	
ـ إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ، يكون الربح منعدم .	
1. أحسب احتمال ربح 20 نقطة و احتمال خسارة 20 نقطة و احتمال تحقيق ربح منعدم	$0,75$
2. نعيد اللعبة السابقة خمس مرات	
أ) أحسب احتمال ربح 100 نقطة	$0,5$
ب) أحسب احتمال ربح 40 نقطة	1
3. خلال لعبة واحدة ، نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ فقط القيم -20 عند الخسارة و 0 عندما يكون	

الربح منعدما و $+20$ عند الربح	
أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,5
ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0,25

التمرين 3 : $2,5$ ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$	
لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي غير المنعدم z و M' النقطة التي لحقها $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$	
1. حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين .	0,5
2. نفترض أن M تخالف النقطتين A و B لحقيهما على التوالي 1 و -1 بين أن : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$	0,5
3. ليكن (Δ) واسط القطعة $[AB]$ بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تنتمي إلى (Δ)	0,75
4. لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى (Γ) فإن M' تنتمي إلى المستقيم (AB)	0,75

التمرين 4 : 10 ن

الجزء الأول :	
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :	
$f(0)=1$ و $\forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{Arc\tan(x)}{x}$	
1. بين أن f متصلة على المجال I	0,5
2. أ) ليكن x من I بين أن : $\forall t\in[0,x]\quad \frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+t^2}\le 1$	0,5
ب) بين أن : $\forall x\in[0,+\infty[\quad \frac{x}{1+x^2}\le Arc\tan(x)\le x$	0,5
ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75
3. أ) علما أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,5
ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I	0,25

الجزء الثاني :	
لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :	
$g(0)=1$ و $\forall x\in]0,+\infty[\quad g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$	
1. أ) بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)\le g(x)\le 1$	0,5
ب) بين g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75

2. بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن $\forall x\in]0,+\infty[\quad g'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$	0,75
3. بين أن الدالة g تناقصية على المجال I	0,25
4. أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$ (لاحظ أن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad 0<Arc\tan(x)<\frac{\pi}{2}$)	0,75
ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	0,5

<u>الجزء الثالث</u> :

1. بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$	0,75
2. أ) تحقق أن : $\forall x\in[0,+\infty[\quad 0\leq 1-f(x)\leq\frac{x^2}{1+x^2}$ (يمكن استعمال السؤال 2. ب) الجزء الأول)	0,5
ب) بين أن $\forall x\in[0,+\infty[\quad \left\lvert g'(x)\right\rvert\leq\frac{1}{2}$	0,75
3. لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0\in\mathbb{R}^+$ و $u_{n+1}=g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\leq\frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$	0,75
ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة	0,75

تصحيح التمرين الأول :

.1

✓ لدينا : $E \subset M_2(\mathbb{R})$

و $E \neq \varnothing$ ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ لأن $I = M(1,0)$)

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E و ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha M(a,b)+\beta M(x,y) &= \alpha\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta x & -3(\alpha b+\beta y) \\ \alpha b+\beta y & \alpha a+\beta x \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha a+\beta x,\alpha b+\beta y)\in E \end{aligned}$$

$\left((\alpha a+\beta x,\alpha b+\beta y)\in \mathbb{R}^2\right)$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$

✓

- لتكن $M(x,y)$ من E

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I+y.J \end{aligned}$$

إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء E

- ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.I+\beta.J=O &\Rightarrow M(\alpha,\beta)=O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن (I,J) أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي (I,J) أساس للفضاء E

و منه $\dim E = card(I,J) = 2$

2. أ) لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : $E \neq \varnothing$ و $E \subset M_2(\mathbb{R})$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(x,y) &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3(ay+bx) \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M(ax-3by, ay+bx) \in E \end{aligned}$$

$(ax-3by, ay+bx) \in \mathbb{R}^2$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب) لنبين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

❖

✓ $(E,+)$ زمرة تبادلية (لأن $(\mathrm{E},+,\cdot)$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $(E,+,\times)$ حلقة

❖

✓ $I = M(1,0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\times$

إذن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية

❖

✓ $\times$ تبادلي في E

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

لدينا : $M(a,b)\times M(x,y) = M(ax-3by, ay+bx)$

و : $M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-3yb, xb+ya)$

إذن لكل $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E : $M(a,b)\times M(x,y) = M(x,y)\times M(a,b)$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

3. أ)

❖ ليكن (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}^2$

✓ $$\varphi\big((a+ib)\times(x+iy)\big)=\varphi\big((ax-by)+i(ay+bx)\big)=M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy) &= M\left(a,\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\\ &= M\left(ax-3\times\frac{b}{\sqrt{3}}\times\frac{y}{\sqrt{3}},a\times\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\times x\right) \quad ✓\\ &= M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

❖ ليكن $M(a,b)$ من E^*

لنحل المعادلة : $\varphi(x+iy)=M(a,b)$

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy)=M(a,b) &\Leftrightarrow M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)=M(a,b)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ y=b\sqrt{3}\end{cases}\end{aligned}$$

إذن لكل $M(a,b)$ من E^* يوجد زوج وحيد $(x,y)=\left(a,b\sqrt{3}\right)$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$\varphi(x+iy)=M(a,b)$$

و منه φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ و $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية فإن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

ج)

✓

$$\begin{aligned} J^{2017} &= \left(M\left(0,1\right)\right)^{2017} \\ &= \left(M\left(0,\frac{\left(\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\ &= \left(\varphi\left(0+i\sqrt{3}\right)\right)^{2017} \\ &= \varphi\left(\left(i\sqrt{3}\right)^{2017}\right) \\ &= \varphi\left(\sqrt{3}^{2017}\times i\right) \\ &= \varphi\left(\sqrt{3}^{2016}\sqrt{3}\times i\right) \\ &= \varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \left(J^{2017}\right)^{-1} &= \left(\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)\right)^{-1} \\ &= \varphi\left(\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)^{-1}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008}\sqrt{3}\times i}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\ &= \varphi\left(\left(0\right)+i\left(\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= M\left(0,\frac{-\sqrt{3}}{3^{1008}\times\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(0,\frac{-1}{3^{1008}}\right) \end{aligned}$$

.4

- ✓ لدينا $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية
- ✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر $M(x,y)$ من E^* يقبل مقلوبا

ليكن $M(x,y)$ من E بحيث : $M(x,y)\neq M(0,0)$

لدينا $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$

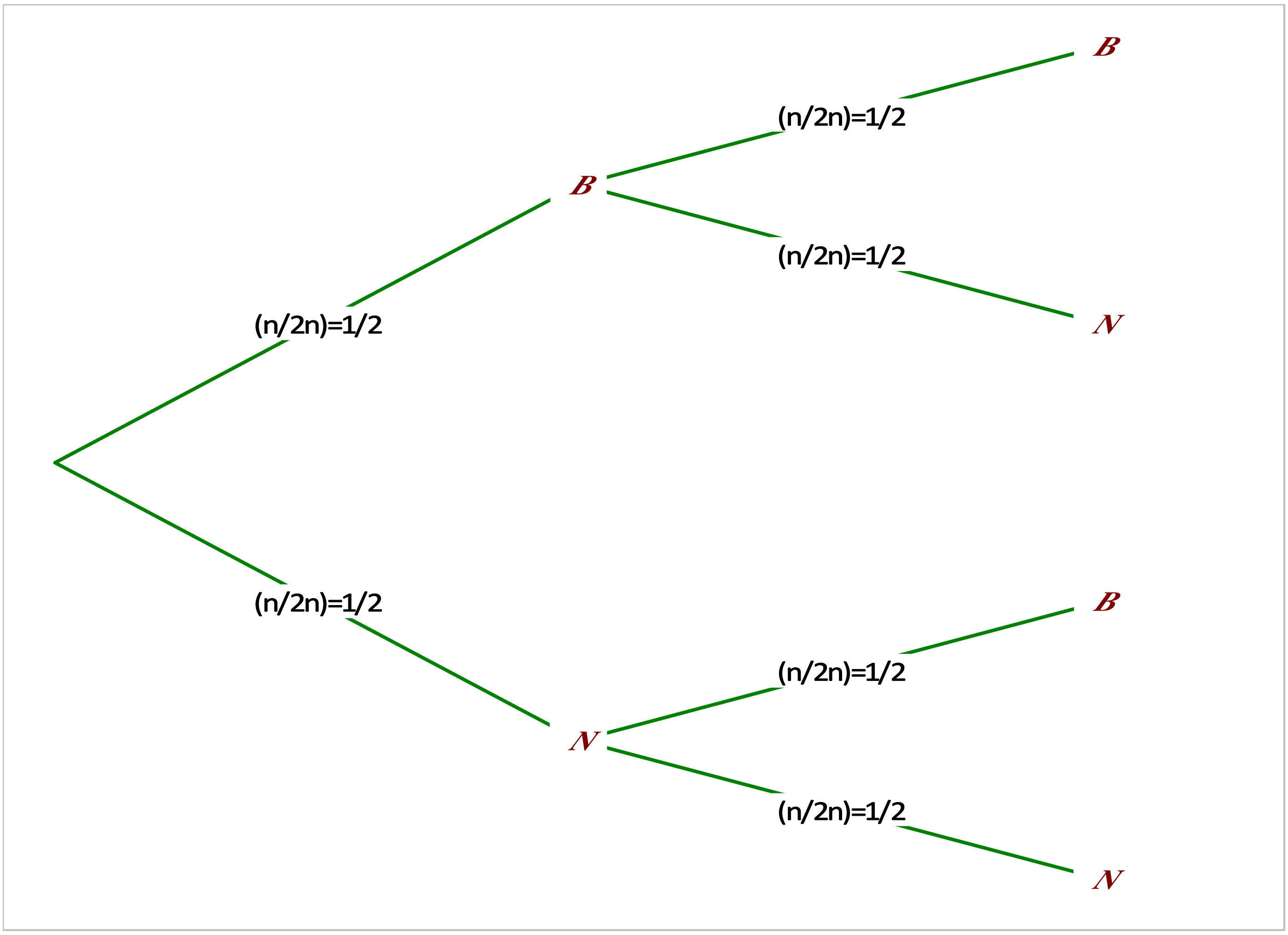
$$d\acute{e}tM(x,y)=\begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+3y^2$$

إذن $d\acute{e}tM(x,y)\neq 0$ (لأن $(x,y)\neq(0,0)$)

$$(M(x,y))^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+3y^2} & \dfrac{3y}{x^2+3y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+3y^2} & \dfrac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix}=M\left(\frac{x}{x^2+3y^2},\frac{-y}{x^2+3y^2}\right)\in E^*$$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني :



.1 ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p(G)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

.2 أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5\left(p(E)\right)^5\left(1-p(E)\right)^{5-5}=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق $EEGGG$ أو $EEEGF$ (مع مراعاة الترتيب)

$$10\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+20\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{60}{512}=\frac{15}{128}$$

.3 أ) $p(X=-20)=p(F)=\frac{1}{4}$

$$p(X=0)=p(G)=\frac{1}{2}$$

$$p(X=20)=p(E)=\frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(-20\times\frac{1}{4}\right)+\left(0\times\frac{1}{2}\right)+\left(20\times\frac{1}{4}\right)=0$$

تصحيح التمرين الثالث :

1. ليكن $z \in \mathbb{C}^*$

M و M' منطبقتين تكافئ $z' = z$

تكافئ $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z$

تكافئ $z = \frac{1}{z}$

تكافئ $z^2 = 1$

تكافئ $z = 1$ أو $z = -1$

2. ليكن $z \in \mathbb{C}^* - \{-1,1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1} \\
&= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} \\
&= \frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} \\
&= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} \\
&= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2
\end{aligned}$$

إذن $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ لكل z من $\mathbb{C}^* - \{-1,1\}$

3. ليكن (Δ) واسط القطعة $[AB]$

نفترض أن M تنتمي إلى (Δ)

إذن $AM = BM$

إذن $\frac{BM}{AM} = 1$ $\qquad (M \neq A)$

لنبين أن M' تنتمي إلى (Δ)

لدينا : $\frac{BM'}{AM'}=\frac{|z'+1|}{|z'-1|}=\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|=\left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=\left(\frac{|z+1|}{|z-1|}\right)^2=\left(\frac{BM}{AM}\right)^2=1^2=1$

إذن $AM'=BM'$

و منه M' تنتمي إلى (Δ)

4. لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$

نفترض أن M تنتمي إلى (Γ)

إذن $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ $\quad$ ($\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}$)

إذن $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

لنبين أن M' تنتمي إلى (AB)

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)[2\pi]\\ &\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right)[2\pi]\\ &\equiv 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)[2\pi]\\ &\equiv \pi[2\pi]\end{aligned}$$

لأن : $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

إذن A و B و M' نقط مستقيمية و منه M' تنتمي إلى (AB)

تصحيح التمرين الرابع :

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad \forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{Arc\tan(x)}{x}$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

لدينا $f(0)=1$

و $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{Arc\tan(x)}{x}=1$

بما أن $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ فإن f في 0 على اليمين

✓ $f_1 : x \mapsto Arc\tan(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $]0,+\infty[$

$f_2 : x \mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $]0,+\infty[$

و $\forall x \in]0,+\infty[\quad f_2(x) \neq 0$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

خلاصة : f متصلة على المجال I

2. أ) ليكن $x \in I = [0,+\infty[$ و ليكن $t \in [0,x]$

لدينا : $0 \leq t \leq x$

إذن : $0 \leq t^2 \leq x^2$

إذن : $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$

و منه : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \quad (\forall t \in [0,x])$

ب) لدينا : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \quad (\forall t \in [0,x])$

إذن : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $\left[\dfrac{t}{1+x^2}\right]_0^x \leq [Arc\tan t]_0^x \leq [t]_0^x$

و منه : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x \quad (\forall x \in [0,+\infty[)$

ج) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{Arc\tan x}{x}-1}{x}$

لدينا : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x \quad (\forall x \in [0,+\infty[)$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} \leq 1 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} - 1 \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} - 1 \leq 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $\dfrac{-x}{1+x^2} \leq \dfrac{\frac{Arc\tan x}{x}-1}{x} \leq 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{1+x^2} = 0$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{Arc\tan x}{x}-1}{x} = 0$

و منه : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $f'_d(0)=0$

3. أ) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

ليكن $x\in]0,+\infty[$: لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{Arc\tan x}{x}\right)' \\ &= \frac{Arc\tan'(x)\times x - Arc\tan(x)\times(x)'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x]0,+\infty[)\quad f'(x)=\frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)}{x^2}$

ب) لدينا : $(\forall x]0,+\infty[)\quad f'(x)=\frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)}{x^2}$

و لدينا : $(\forall x]0,+\infty[)\quad x^2>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة : $\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)\le 0$

إذن : $f'(x)\le 0$

و منه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

1. أ) ليكن $t\in]0,+\infty[$ و $x\in]0,+\infty[$

لدينا : $\frac{t}{1+t^2}\le Arc\tan t\le t$

إذن : $\frac{1}{1+t^2}\le\frac{Arc\tan t}{t}\le 1$

إذن: $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\le\int_0^x\frac{Arc\tan t}{t}dt\le\int_0^x 1dt$

إذن : $Arc\tan x \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq x$

إذن : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

و منه : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq g(x) \leq 1 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

ب) لدينا : $f(x) \leq g(x) \leq 1 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $f(x)-1 \leq g(x)-1 \leq 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $\dfrac{f(x)-1}{x} \leq \dfrac{g(x)-1}{x} \leq 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \leq 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

لدينا f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

و بالتالي : g قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $g'_d(0) = 0$

2. أ) ليكن $x \in]0,+\infty[$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على $[0,x]$

و الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و منه g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\ &= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\int_0^x f(t)\,dt+f(x)\right) \\ &= \frac{1}{x}\big(f(x)-g(x)\big) \end{aligned}$$

و منه : $\forall x\in\,]0,+\infty[\quad g'(x)=\dfrac{1}{x}\big(f(x)-g(x)\big)$

3. لدينا : $0<x$ و لدينا : $f(x)-g(x)\leq 0$

إذن : $\forall x\in\,]0,+\infty[\quad g'(x)\leq 0$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x>1$ و ليكن $1\leq t\leq x$

لدينا : $0<Arc\tan t<\dfrac{\pi}{2}$

إذن : $0<\dfrac{Arc\tan t}{t}<\dfrac{\pi}{2t}$

إذن : $0<\displaystyle\int_1^x \frac{Arc\tan t}{t}\,dt<\int_1^x \frac{\pi}{2t}\,dt$

إذن : $0<\displaystyle\int_1^x \frac{Arc\tan t}{t}\,dt<\frac{\pi}{2}[\ln t]_1^x$

إذن : $0<\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$

بما أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

ب) لدينا : $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

ليكن $t\in[0,1]$

لدينا : $0\leq t\leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f(1)\leq f(t)\leq f(0)$

إذن : $\dfrac{\pi}{4}\leq f(t)\leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt \leq \frac{1}{x}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt = 0$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$

نعتبر الدالة : $h : x \mapsto g(x) - x$

✓ h متصلة على $[0,1]$

✓ h قابلة للاشتقاق على $[0,1]$ و لدينا : $h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ (لأن $g'(x) \leq 0$)

إذن h تناقصية قطعا على $[0,1]$

✓ ولدينا : على $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$ و $h(1) = g(1) - 1 = \int_0^1 f(t)dt - 1 < 0$

إذن : $h(0) \times h(1) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : $\exists! \alpha \in [0,1] \quad g(\alpha) = 0$

2. أ) ليكن $x \in [0,+\infty[$

لدينا : $1 - f(x) = 1 - \frac{Arc\tan x}{x}$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\forall x \in [0,+\infty[\quad \frac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan(x) \leq x$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{Arc\tan(x)}{x} \leq 1$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad -1 \leq -\frac{Arc\tan(x)}{x} \leq -\frac{1}{1+x^2}$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad 0 \leq 1 - \frac{Arc\tan(x)}{x} \leq 1 - \frac{1}{1+x^2}$

و منه : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x = 0$)

ب) ليكن $x \in [0,+\infty[$

لدينا : $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $-1 \leq -f(x) \leq \frac{-1}{1+x^2}$

إذن : $\frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$

إذن : $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x 1 dt$

إذن : $Arc\tan x \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq x$

إذن : $f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

إذن : $f(x) \leq g(x) \leq 1$

إذن : $0 \leq g(x) - f(x) \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $0 \leq \frac{1}{x}\left(g(x) - f(x)\right) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

و منه : $\forall x \in [0,+\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3. أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$: لدينا :
- ✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α
- ✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α
- ✓ $\forall x \in [0,+\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $\left|g(u_n)-g(\alpha)\right| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

وبما أن $u_{n+1}=g(u_n)$ و $\alpha=g(\alpha)$

فإن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب) لنتين بالترجع : $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

- ✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$ و $|u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$

إذن : $|u_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$

- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$
  - نفترض أن : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$
  - و نبين أن : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$ ؟

لدينا حسب الافتراض : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

إذن : $\boxed{\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|} \quad \boxed{a}$

و حسب نتيجة السؤال السابق : $\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|} \quad \boxed{b}$

من $\boxed{a}$ و $\boxed{b}$ نستنتج : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

- ✓ نستنتج : $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متقاربة و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

つづく