أَهَمُّ مَا نَحْتَاجُهُ فِي دِرَاسَةِ الدَّوَالِ

أ. النهايات و الفروع اللانهائية

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب أفقي معادلته $y = b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

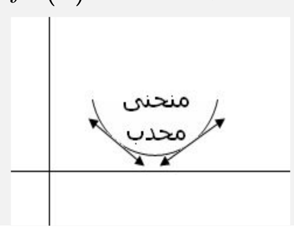
$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0 \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب مائل معلدلته $y = ax + b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

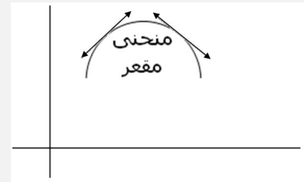
- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل
- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب
- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ ← C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$

ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

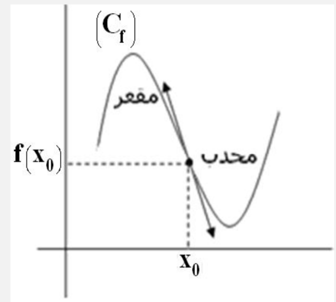
- إذا كان $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ فإن (C_f) محدب



- إذا كان $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ فإن (C_f) مقعر



- إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف
- إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف



ج. مركز و محور تماثل (C_f)

- المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

د. اتصال دالة عددية

- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

ه. مبرهنة القيم الوسيطية

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$]a,b[$

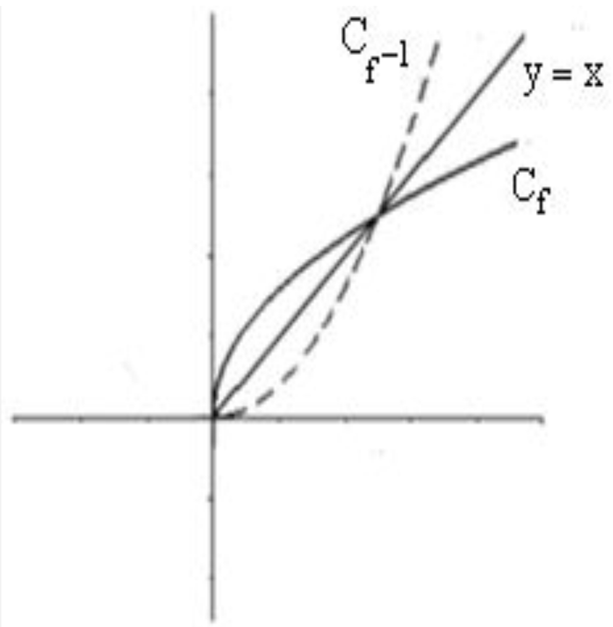
- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

و. اتصال مركب دالتين

خاصية :
إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I.

ز. الدالة العكسية



خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن المعادلة $f(x)=y$ حيث $y \in f(I)$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

الدالة التي تربط كل عدد y بالحل تسمى الدالة العكسية للدالة f و نرمز لها ب : f^{-1}

نتائج:

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f(x)=x & ;x \in I \\ f \circ f^{-1}(x)=x & ;x \in J \end{cases} \quad (2)$$

خاصيات: لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)

ح. الإشتقاق

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l \in \mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l \in \mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$

<table>
<tr><td>f قابلة للاشتقاق في a على اليسار</td><td>$\leftrightarrow$</td><td>$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$
$l = f_g'(a)$</td><td>$\leftrightarrow$</td><td>(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_g'(a)$ و معادلته :
$y = f_g'(a).(x-a)+f(a)$</td></tr>
<tr><td>f قابلة للاشتقاق في a</td><td></td><td>✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين
✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار
✓ $f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$</td><td></td><td>$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته :
$y = f'(a).(x-a)+f(a)$</td></tr>
</table>

- إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Rightarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Rightarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Rightarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Rightarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

الدالة f	**الدالة المشتقة** f'	**المجال** I
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$

$I=]-\infty,0[$ أو $I=]0,+\infty[$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$
$I=]0,+\infty[$	$x\mapsto rx^{r-1}$	$x\mapsto x^r \quad r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\}$
$I=]0,+\infty[$	$x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\mapsto\sqrt{x}$
$I=]-\infty,0[$ أو $I=]0,+\infty[$	$x\mapsto\dfrac{-1}{x^2}$	$x\mapsto\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x\mapsto\cos x$	$x\mapsto\sin x$
$\mathbb{R}$	$x\mapsto-\sin x$	$x\mapsto\cos x$
$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$	$x\mapsto 1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x\mapsto\tan x$

الدالة المشتقة	**الدالة**
$\alpha.f'$	$\alpha.f$
$f'+g'$	$f+g$
$f'\times g+f\times g'$	$f\times g$
$-\dfrac{g'}{g^2}$	$\dfrac{1}{g}$
$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$	$\dfrac{f}{g}$
$f'\times g'\circ f$	$g\circ f$
$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$nf'f^{n-1}$	f^n

- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

$$(\forall x>0)\quad \left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- إذا كانت f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x\in I)\quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left(f(x)\right)^{n-1}}}$$

- لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0)=y_0$

إذا كانت $f'(y_0)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $\left(f^{-1}\right)'(x_0)=\dfrac{1}{f'(y_0)}$

- إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x\in f(I))\quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}$$

رتابة دالة

- إذا كانت $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تزايدية على I
- إذا كانت $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تناقصية على I
- إذا كانت $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تناقصية قطعا على I

خاصية

- إذا كانت $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعا على I

ط. دالة اللوغاريتم النبيري

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln} =]0,+\infty[\quad \left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ نرمز له ب : e بحيث $e \simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- إشارة $\ln x$:
  - إذا كان : $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$
  - إذا كان : $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0,+\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

- $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث :

$\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$

فإن الدالة $x \mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و

لدينا : $\left(\ln|U(x)|\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)} \quad \forall x \in I$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعا :

$$\left(\ln(U(x))\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة : مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(x^r)=r\ln(x)$

هي الدوال : $x \mapsto \ln|U(x)|+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

ي. الدالة الأسية

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

نتائج :

$$\begin{cases} e^x=y \\ (x\in\mathbb{R})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(y) \\ (y>0)\end{cases}$$

$$\exp:\mathbb{R}\mapsto]0,+\infty[$$
$$x\mapsto \exp(x)$$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ e^x>0$ و $D_{\exp}=\mathbb{R}$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$$
$$e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$$
$$e^x\geq e^y \Leftrightarrow x\geq y$$
$$\forall x\in\mathbb{R}:\ln(e^x)=x$$
$$\forall x>0: e^{\ln x}=x$$

❖ $e^1=e$ و $e^0=1$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^x\times e^y=e^{x+y}$

2) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

3) $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$

4) $(e^x)^r=e^{rx} \qquad (r\in\mathbb{Q})$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^ne^x=\begin{cases}0^+ & n \text{ زوجي}\\ 0^- & n \text{ فــردي}\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

1) الدالة $\exp$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad (e^x)'=e^x$$

2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x\mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x\in I) \quad \left(e^{U(x)}\right)'=U'(x)e^{U(x)}$$

3) $(\forall x\in I) \quad (e^{rx})'=re^{rx}$

4)

الدالة	الأصلية
e^x	e^x
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$

ك. الدوال الأصلية

f دالة معرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=.......$	الدوال الأصلية ل f على I معرفة بما يلي: $F(x)=......$	المجال I
k (k عدد حقيقي ثابت)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\neq -1;n\in\mathbb{Z}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
x^r $(r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,(k\in\mathbb{Z})$
$(a\neq 0),\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$(a\neq 0),\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$

الدالة f	الدوال الأصلية ل f على I	شروط على u
$u'u^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$u'u^n$ $(n\neq -1;n\in\mathbb{Z}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$u'u^r$ $(r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$u'e^u$	e^u+c	لكل x من I

ل. حساب التكامل

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

3. خاصيات :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$

يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

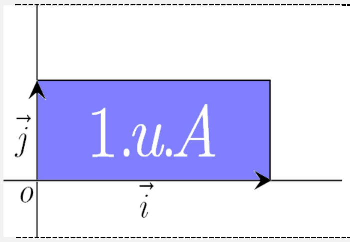
خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

I. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$
وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$
$1u.A = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

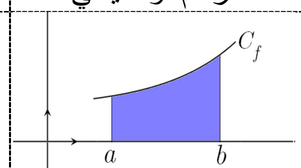
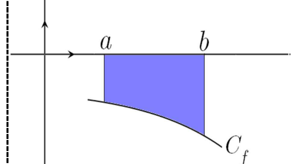
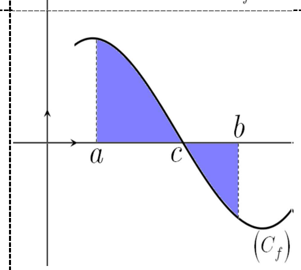


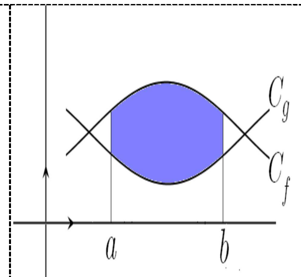
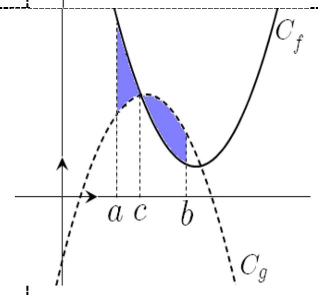
خاصية 1: لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

خاصية 2: لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$

$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right) u.A$	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	
$(f(x)-g(x))dx+\int_c^b(g(x)-f(x))dx\Big)u.A$	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c,b]$	

I. <u>حساب الحجوم :</u>

<u>خاصية 1:</u>

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$

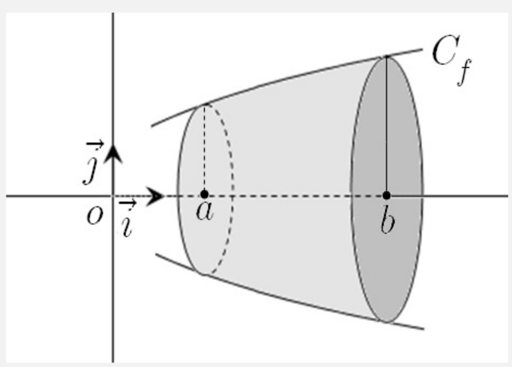
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$

إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم

<u>خاصية 2:</u>

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



つづく