~ $2^{ème}$ Sciences Math. ~
La fonction 'ln'
(8 exercices résolus)

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\left(x^2+6x+5\right)-\ln(7x+17)=0$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x-1-\ln(x)>0$

Exercice 2 :

Déterminer une fonction primitive de f dans les cas suivatns :

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
2) $f(x)=\tan(x)$
3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}$
4) $f(x)=\dfrac{1}{x\times\ln(x)}$

Exercice 3 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x-1-\ln(x)>0$
2) En déduire que : $(\forall x>1)\quad 0<\ln(x)<2\left(\sqrt{x}-1\right)$
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$
4) Montrer que : $\left(\forall\alpha\in\mathbb{Q}_+^*\right)\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}=0$

Exercice 4 :

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$
2) Montrer que $\left(\forall\alpha\in\mathbb{Q}_+^*\right)\quad \lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)=0$

Exercice 5 :

Calculer :

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

Exercice 6 :

Etudier la fonction f

$$f(x) = x - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$

On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$

1) Dresser le tableau de variations de g_n
2) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \sqrt{x} > \ln(x)$
3) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
$$\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$
4) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

Exercice 8 :

1) Etudier la monotonie des fonctions u et v définies par :
$$u(x) = \ln(x) - \frac{x-1}{x} \quad , \quad v(x) = x - 1 - \ln(x)$$
2) En déduire que pour tout x de $]1, +\infty[$, on a : $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$
3) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n}$

Corrigé de l'exercice 1

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\left(x^2+6x+5\right)-\ln\left(7x+17\right)=0$

   - L'équation est définie si et seulement si $x^2+6x+5>0 \quad et \quad 7x+17>0$

   Ce qui est équivaut à $\left[x<-5 \quad ou \quad x>-1\right] \quad et \quad x>\dfrac{-17}{7}$

   c.-à-d. $x>-1$

   donc l'équation est définie sur $\left]-1,+\infty\right[$

   -

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2+6x+5\right)-\ln\left(7x+17\right)=0 &\Leftrightarrow \ln\left(x^2+6x+5\right)=\ln\left(7x+17\right)\\ &\Leftrightarrow x^2+6x+5=7x+17\\ &\Leftrightarrow x^2-x-12=0\\ &\Leftrightarrow x=4 \quad ou \quad x=-3\\ &\Leftrightarrow x=4 \qquad \left(-3\notin\left]-1,+\infty\right[\right)\end{aligned}$$

   Donc $S=\{4\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x-1-\ln(x)>0$

   - L'inéquation est définie si et seulement si $x>0$
   - Considérons la fonction $f: x\mapsto x-1-\ln(x)$

     f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ (somme de fonctions qui sont dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$)

     Soit $x\in\left]0,+\infty\right[$

     On a : $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

     Donc $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right) \quad f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit que : $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right) \quad f(x)>0$

Donc : $\quad S=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Corrigé de l'exercice 2

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

On a $D_f=\mathbb{R}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}$$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\ln\left|x^2+1\right|$$

Puisque $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 1+x^2>0$ alors $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\ln\left(x^2+1\right)$

D'où $(\forall x\in\mathbb{R})\quad F(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

2) $f(x)=\tan(x)$

On a $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Considérons l'intervalle $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

La fonction f est continue sur I donc f admet une primitive sur I

Soit $x\in I$:

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\frac{\cos'(x)}{cos(x)}$$

Soit F une primitive de f sur I

$$F(x)=-\ln\left|\cos(x)\right|$$

Et on a : $(\forall x\in I)\quad \cos(x)>0$ donc $\left|\cos(x)\right|=\cos(x)$

D'où $(\forall x\in I)\quad F(x)=-\ln\left(\cos(x)\right)$

3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x\in\mathbb{R} / x^2-3x+1\neq 0\right\} \\ &= \mathbb{R}-\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}\end{aligned}$$

Considérons l'intervalle $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$

La fonction f est continue sur I donc f admet une primitive sur I

Soit $x\in I$:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+1}=\frac{\left(x^2-3x+1\right)'}{x^2-3x+1}$$

Soit F une primitive de f sur I

$(\forall x\in I)\quad F(x)=\ln\left|x^2-3x+1\right|$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x\times\ln(x)}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x\in\mathbb{R} / x\neq 0 \quad et \quad \ln(x)\neq 0 \quad et \quad x>0\right\} \\ &=]0,1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

Considérons l'intervalle $I=]0,1[$

La fonction f est continue sur I donc f admet une primitive sur I

Soit $x\in I$:

$$f(x)=\frac{1}{x\times\ln(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}$$

$(\forall x\in I)\quad F(x)=\ln\left|\ln(x)\right|$

Corrigé de l'exercice 3

1) Voir exercice 1 : $S=]0,1[\cup]1,+\infty[$
2) Soit $x\in]1,+\infty[$
   - ✓ La fonction "ln" est strictement croissante sur $]1,+\infty[$

     $$\begin{aligned} x>1 \quad &\Rightarrow \ln(x)>\ln(1) \\ &\Rightarrow \ln(x)>0\end{aligned}$$

   - ✓ Montrons que $\ln(x)<2\left(\sqrt{x}-1\right)$

On a d'après le résultat de la question 1) : $\ln(x) < x-1$

Donc $\ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}-1 \quad (\sqrt{x} > 1)$

Donc $\frac{1}{2}\ln(x) < \sqrt{x}-1$

Donc $\ln(x) < 2\left(\sqrt{x}-1\right)$

✓ Et par suite $(\forall x > 1) \quad 0 < \ln(x) < 2\left(\sqrt{x}-1\right)$

3) On a $(\forall x > 1) \quad 0 < \ln(x) < 2\left(\sqrt{x}-1\right)$

Donc $(\forall x > 1) \quad 0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

4) Soient $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et $x > 1$

$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\ln\left(x^\alpha\right)}{x^\alpha}$

On pose $t = x^\alpha$

$\lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\alpha} \times \frac{\ln(t)}{t} = 0$

Corrigé de l'exercice 4

1) Montrons que : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$

Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$

On pose $t = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha} x^\alpha \ln\left(x^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln\left(x^\alpha\right)$

On pose $t = x^\alpha$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$

Donc $\left(\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^*\right) \quad \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$

Corrigé de l'exercice 5

1) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$

$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$

La fonction "ln" est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ donc fonction "ln" est dérivable en fonction "ln" est dérivable en 1

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = 1 \quad \left(\ln'(x) = \frac{1}{x}\right)$

2) On pose $t = x+1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$

Corrigé de l'exercice 6

1) On a $f(x) = x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0 \quad et \quad 1+\frac{1}{x} > 0 \right\}$

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{x} > 0 \quad &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,+\infty\right[\end{aligned}$$

Donc $D_f = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,+\infty\right[$

- ✓ Au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- ✓ <u>Au voisinage de 0^+</u>

On a $\lim\limits_{x\to0^+} 1+\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

Et par suite $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

- ✓ <u>Au voisinage de -1^-</u>

On a $\lim\limits_{x\to-1^-} 1+\dfrac{1}{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

- ✓ <u>Au voisinage de $-\infty$</u>

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

Donc D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

On a f est dérivable sur D_f (somme de deux fonctions qui sont dérivables sur D_f)

Soit $x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

$$f'(x)=1-\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'}{1+\dfrac{1}{x}}=1-\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=1+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}$$

On a : $(\forall x\in D_f)\quad f'(x)>0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ (hachuré) ‖		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ (hachuré) ‖		$-\infty \nearrow +\infty$

- ✓ On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

Donc (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ au voisinage de 0 à droite

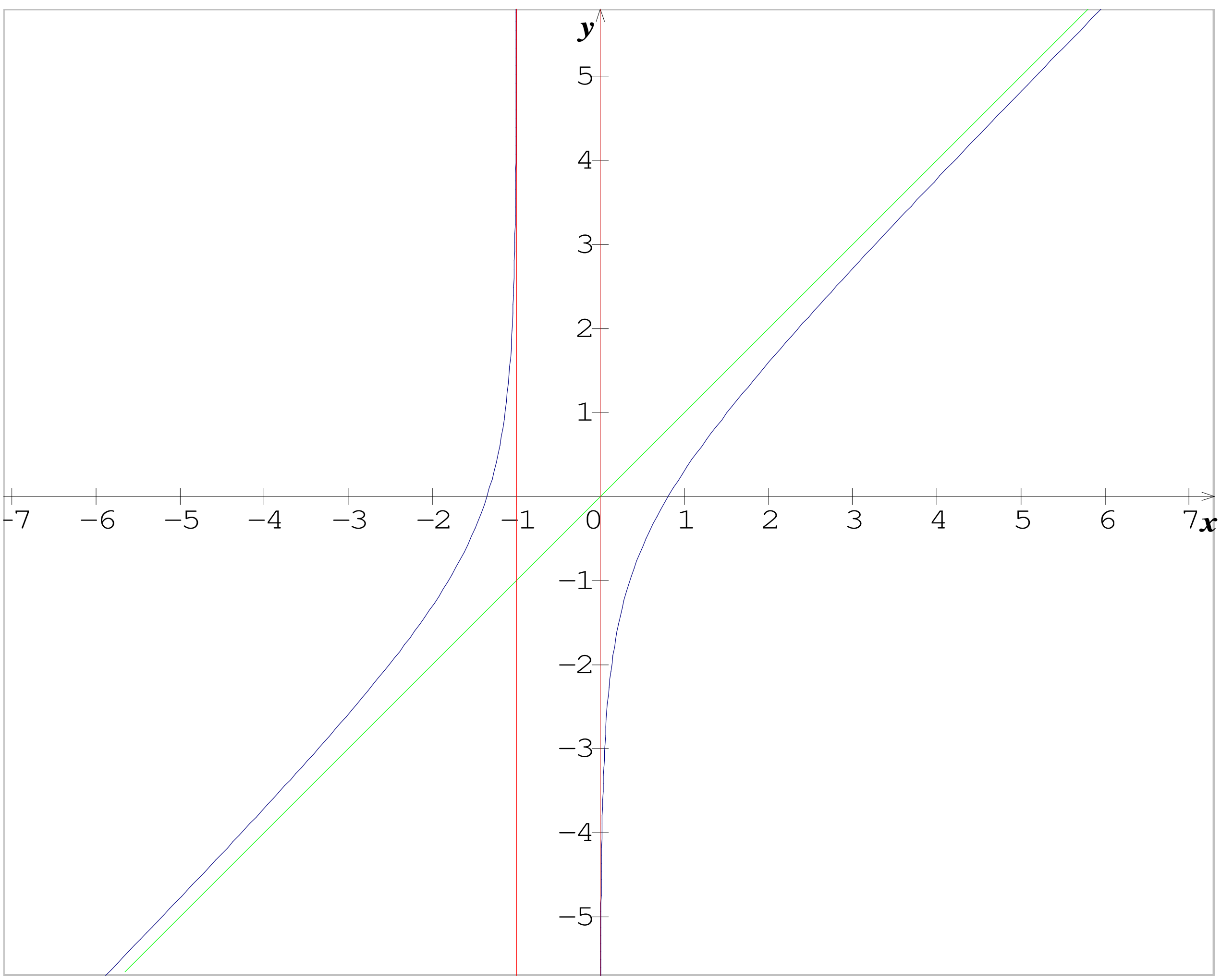
Et (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$ au voisinage de -1 à gauche

- ✓ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

  Et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{|x|\to+\infty} -\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

  Donc (C_f) admet un asymptote oblique d'équation $y=x$

  au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$



Corrigé de l'exercice 7

1) La fonction g_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$)

Soit $x \in]0,+\infty[$

$g_n'(x) = \left(nx + 2\ln(x)\right)' = n + \dfrac{2}{x}$

Donc : $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right) \quad g_n'(x) > 0$

Et par suite g_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} nx + 2\ln(x) = +\infty$
- ✓ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} nx + 2\ln(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$	$\|$ $+$	
$g_n(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2) Montrons que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \sqrt{x} > \ln(x)$

Considérons la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} - \ln(x)$

La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$)

Soit $x \in]0,+\infty[$

$h'(x) = \left(\sqrt{x} - \ln(x)\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

On a $2x > 0$ donc $h'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 2$

Si $0 < x < 4$ alors $\sqrt{x} - 2 < 0$ donc $h'(x) < 0$ c'est-à-dire que h est strictement décroissante sur $]0,4[$

Si $x > 4$ alors $\sqrt{x} - 2 > 0$ donc $h'(x) > 0$ c'est-à-dire que h est strictement croissante sur $]4,+\infty[$

Donc $h(4)$ est un minimum de h sur $]0,+\infty[$

Donc $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad h(x)\geq h(4)$

Donc $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad h(x)\geq 2-2\ln(2)>0$

Donc $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad \sqrt{x}-\ln(x)>0$

Et par suite $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\quad \sqrt{x}>\ln(x)$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 3$

La fonction g_n est <u>continue et strictement croissante sur</u> $\left]0,+\infty\right[$ et $g_n(\left]0,+\infty\right[)=\mathbb{R}$

Donc $0\in g_n(\left]0,+\infty\right[)$

Donc l'équation $g_n(x)=0$ admet une seule solution α_n **sur** $\mathbb{R}_+^*$ **.**

Puisque $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1-2\ln(n)$ et $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}-\ln(n)$

Alors $g_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$ et $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>0$

Donc : $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 3$

4) Puisque $\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

Corrigé de l'exercice 8

1)

- La fonction u est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$

  Soit $x\in\left]0,+\infty\right[$

  On a

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(\ln(x)-\frac{x-1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x-1}{x^2} \end{aligned}$$

$u'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

On a $x^2>0$ donc $u'(x)$ a le même signe que $x-1$

Donc $(\forall x\in]0,1[)\quad u'(x)<0$ et $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad u'(x)>0$

D'où u est strictement décroissante sur $]0,1]$ et u est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

- La fonction v est dérivable sur $]0,+\infty[$

Soit $x\in]0,+\infty[$

On a

$$\begin{aligned} v'(x) &= \left(\text{x}-1-\ln(x)\right)' \\ &= 1-\frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

$v'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

On a $x>0$ donc $v'(x)$ a le même signe que $x-1$

Donc $(\forall x\in]0,1[)\quad v'(x)<0$ et $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad v'(x)>0$

D'où v est strictement décroissante sur $]0,1]$ et v est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

2) Soit $x\in]1,+\infty[$

On a u est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ donc $u(x)>u(1)$

Donc $u(x)>0$ c'est-à-dire $\frac{x-1}{x}<\ln x$

Et on a v est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ donc $v(x)>v(1)$

Donc $v(x)>0$ c'est-à-dire $\ln x<x-1$

Et par suite pour tout x de $]1,+\infty[$, on a : $\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

On a $e>1$ donc $\sqrt[n]{e}>1$

D'après le résultat de la question 2) , on a : $\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[n]{e}}<\ln\sqrt[n]{e}<\sqrt[n]{e}-1$

Donc $\dfrac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[n]{e}} < \dfrac{1}{n} < \sqrt[n]{e}-1$

Donc $\begin{cases} \dfrac{1}{n}+1 < \sqrt[n]{e} \\ n\sqrt[n]{e}-n < \sqrt[n]{e} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \dfrac{1}{n}+1 < \sqrt[n]{e} \\ \sqrt[n]{e} < \dfrac{n}{n-1} \end{cases}$

Donc $1+\dfrac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}$

Donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$

Et par suite pour tout n de $\mathbb{N}^*-\{1\}$, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$

つづく