~ 2ème année Sciences Math. ~

Le théorème des accroissements finis
Le théorème de Rolle

(9 exercices résolus)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$

Montrer que l'équation $f'(x)=0$ possède exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

1) Montrer que l'équation $\sin(x)=x^2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$
2) Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\cos(c)-2c=0$

Exercice 3 :

1) Montrer que : $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \left|\sin(x)-\sin(y)\right|\leq |x-y|$
2) En déduire que : $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \left|\cos(x)-\cos(y)\right|\leq |x-y|$

Exercice 4 :

Montrer que : $\left(\forall (x,y)\in\left(\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)^2\right)\quad \left|\tan(x)-\tan(y)\right|\geq |x-y|$

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0,1]$ tel que :

$\left(\forall x\in[0,1]\right)\quad f(x)=2x\sqrt[3]{x^2+1}$

Et soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\left(\forall x\in[0,1]\right)\quad g(x)=\frac{3}{4}(1-x)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}-1\right)$

1) Montrer qu'il existe α de $]0,1[$ tel que $g'(\alpha)=0$
2) En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h sur $[0,\alpha]$ tel que

   $h(x)=-\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}-1\right)+(1-x)f(x)$

   Montrer que : $\left(\exists c\in]0,1[\right)\quad f'(c)\geq 2f(c)$

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)-\sqrt[3]{x}$

1) Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$, montrer qu'il existe c_x de $\left]0,x^3\right[$ tel que : $\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

2) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$

Exercice 7 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ tel que :
$\left(\forall x\in\left]a,b\right[\right)\quad g'(x)\neq0$

1) Montrer que g est injective
2) Montrer que : $\left(\exists c\in\left]a,b\right[\right)\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 8 :

Soit $p\in\left]0,1\right[$

Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \dfrac{p}{(n+1)^{1-p}}\leq(n+1)^p-n^p\leq\dfrac{p}{n^{1-p}}$

Exercice 9 :

Montrer que : $(\forall x>0)\quad \dfrac{x}{1+x^2}<\operatorname{Arctan}x<x$

Corrigé de l'exercice 1

On a $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a $f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad ou \quad x=-1 \quad ou \quad x=-2 \quad ou \quad x=-3$

Donc $f(0)=f(-1)=f(-2)=f(-3)$

✓ f est continue sur $[-3,-2]$

f est dérivable sur $]-3,-2[$

$f(-3)=f(-2)$ Donc d'après le théorème de Rolle

Donc d'après le théorème de Rolle : il existe $c_1\in]-3,-2[$ tel que $\boxed{f'(c_1)=0}$ (1)

✓ f est continue sur $[-2,-1]$

f est dérivable sur $]-2,-1[$

$f(-2)=f(-1)$ Donc d'après le théorème de Rolle

Donc d'après le théorème de Rolle : il existe $c_2\in]-2,-1[$ tel que $\boxed{f'(c_2)=0}$ (2)

✓ f est continue sur $[-1,0]$

f est dérivable sur $]-1,0[$

$f(-1)=f(0)$ Donc d'après le théorème de Rolle

Donc d'après le théorème de Rolle : il existe $c_3\in]-1,0[$ tel que $\boxed{f'(c_3)=0}$ (3)

D'après (1),(2) et (3) on déduit que l'équation $f'(x)=0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$

Remarque : $f'(x)$ est un polynôme de troisième degré donc l'équation $f'(x)=0$ possède exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

Corrigé de l'exercice 2

1) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin(x)-x^2$

✓ f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

✓ $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi^2}{16} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$f(\alpha)=0$

2) On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=\cos(x)-2x$

Donc $\cos(x)-2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x)=0$

On considère l'intervalle $[0,\alpha]$:

- ✓ On a f est continue sur $[0,\alpha]$, f est dérivable sur $]0,\alpha[$ et $f(0)=\mathrm{f}(\alpha)$

  Donc d'après le théorème de Rolle :

  Il existe $c\in[0,\alpha]$ tel que $f'(c)=0$

  On déduit qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\cos(c)-2c=0$

Corrigé de l'exercice 3

1) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\sin(t)$

- ✓ Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $x\neq y$

On a f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur l'intervalle fermé I d'extrémités x et y

Et on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur I

Donc d'après le théorème des accroissements finis : il existe $c\in I-\{x,y\}$ tel que :

$f(x)-f(y)=f'(c).(x-y)$

c.-à-d. $\sin(x)-\sin(y)=\cos(c).(x-y)$

donc $\left|\dfrac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}\right|=\left|\cos(c)\right|$

on sait que $\left|\cos(c)\right|\leq 1$

donc $\left|\dfrac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}\right|\leq 1$

Donc $\left|\sin(x)-\sin(y)\right|\leq|x-y| \quad (I)$

- ✓ Si $x=y$: L a relation (I) est vérifiée

On déduit que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \left|\sin(x)-\sin(y)\right|\leq|x-y|$

2) D'après le résultat de la question 1) : $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \left|\sin(a)-\sin(b)\right|\leq|a-b|$

Soients x et y deux éléments de $\mathbb{R}$

Posons $a=\frac{\pi}{2}-x$ et $b=\frac{\pi}{2}-y$

Donc $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right|\leq\left|\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right|$

Donc $\left|\cos(x)-\cos(y)\right|\leq|y-x|$

D'où $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad\left|\cos(x)-\cos(y)\right|\leq|x-y|$

Corrigé de l'exercice 4

Considérons la fonction f définie sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(t)=\tan(t)$

- ✓ Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $x\neq y$

On a f est continue sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc elle est continue sur l'intervalle fermé I d'extrémités x et y

Et on a f est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc elle est dérivable sur I

Donc d'après le théorème des accroissements finis : il existe $c\in I-\{x,y\}$ tel que :

$f(x)-f(y)=f'(c).(x-y)$

c.-à-d. $\tan(x)-\tan(y)=\left(1+\tan^2(c)\right).(x-y)$

donc $\left|\frac{\tan(x)-\tan(y)}{x-y}\right|=\left|1+\tan^2(c)\right|$

on sait que $\left|1+\tan^2(c)\right|\geq 1$

donc $\left|\frac{\tan(x)-\tan(y)}{x-y}\right|\geq 1$

Donc $\left|\tan(x)-\tan(y)\right|\geq|x-y|\quad(I)$

- ✓ Si $x=y$: L a relation (I) est vérifiée

On déduit que : $\left(\forall(x,y)\in\left(\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)^2\right)\quad\left|\tan(x)-\tan(y)\right|\geq|x-y|$

Corrigé de l'exercice 5

1)

- ✓ $g_1 : x \mapsto \frac{3}{4}(1-x)$ est continue sur $[0,1]$
- ✓ $x \mapsto (1+x^2)^4$ est continue et positive sur $[0,1]$

  Donc $x \mapsto \sqrt[3]{(1+x^2)^4}$ est continue sur $[0,1]$

  Donc $g_2 : x \mapsto \sqrt[3]{(1+x^2)^4} - 1$ est continue sur $[0,1]$

- ❖ Et par suite $g = g_1 \times g_2$ est continue sur $[0,1]$
- ✓ $g_1 : x \mapsto \frac{3}{4}(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$
- ✓ $x \mapsto (1+x^2)^4$ est dérivable et strictement positive sur $]0,1[$

  Donc $x \mapsto \sqrt[3]{(1+x^2)^4}$ est dérivable sur $]0,1[$

  Donc $g_2 : x \mapsto \sqrt[3]{(1+x^2)^4} - 1$ est dérivable sur $]0,1[$

- ❖ Et par suite $g = g_1 \times g_2$ est dérivable sur $]0,1[$
- ❖ Et on a $g(0) = g(1) = 0$

  Donc d'après le théorème de Rolle : α de $]0,1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$

2)

- ✓ $f_1 : x \mapsto -\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^4} - 1\right)$ est continue sur $[0,\alpha]$ ($[0,\alpha] \subset [0,1]$)
- ✓ f est continue sur $[0,\alpha]$ car elle est dérivable sur $[0,1]$
- ✓ $f_2 : x \mapsto 1-x$ est continue sur $[0,\alpha]$
  - ❖ Donc $h = f_1 + f_2 \times f$ est continue sur $[0,\alpha]$
- ✓ $f_1 : x \mapsto -\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^4} - 1\right)$ est dérivable sur $]0,\alpha[$
- ✓ f est dérivable sur $]0,\alpha[$ car elle est dérivable sur $[0,1]$
- ✓ $f_2 : x \mapsto 1-x$ dérivable sur $]0,\alpha[$
  - ❖ Donc $h = f_1 + f_2 \times f$ est dérivable sur$]0,\alpha[$
- ✓ On a $h(0) = 0$

Et on a $g'(x)=-\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}-1\right)+(1-x)f(x)=h(x)$

Donc $h(\alpha)=g'(\alpha)=0$

D'où $\underline{\underline{h(\alpha)=h(0)}}$

Donc d'après le théorème de Rolle : il existe $c\in]0,1[$ tel que : $h'(c)=0$

Et on a pour tout x de $]0,\alpha[$: $h'(x)=-2f(x)+(1-x)f'(x)$

Puisque $h'(c)=0$ alors $f'(c)=\frac{1}{1-c}(2f(c))$

Et comme $0<c<\alpha<1$ donc $\frac{1}{1-c}>1$

D'où $\frac{1}{1-c}(2f(c))\geq 2f(c)$ $\quad$ ($(\forall x\in[0,1])\quad f(x)\geq 0$)

c.-à-d. $f'(c)\geq 2f(c)$

Donc $(\exists c\in]0,1[)\quad f'(c)\geq 2f(c)$

Corrigé de l'exercice 6

1) Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$ **:**

On a f est continue sur $\left[0,x^3\right]$ et dérivable sur $\left]0,x^3\right[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis : il existe $c_x\in\left]0,x^3\right[$ tel que :

$$\frac{f\left(x^3\right)-f(0)}{x^3-0}=f'(c_x)$$

On a : $\left(\forall t\in\mathbb{R}_*^+\right)\quad f'(t)=\frac{1}{3}\times\frac{\cos\left(\sqrt[3]{t}\right)-1}{\left(\sqrt[3]{t}\right)^2}$

Donc il existe c_x de $\left]0,x^3\right[$ tel que : $\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{1}{3}\times\frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

2) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$ il existe c_x de $\left]0,x^3\right[$ tel que : $\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{1}{3}\times\frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

Puisque $\lim_{x\to 0}c_x=0$

alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=\lim\limits_{t\to0}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$

et puisque la fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ est paire

alors $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$

et par suite $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$

Corrigé de l'exercice 7

1) Soient x et y deux éléments de $[a,b]$ tels que : $x\neq y$

- ✓ g est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités x et y
- ✓ g est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités x et y

D'après le théorème des accroissements finis , on a :

$(\exists\alpha\in]a,b[)\quad g(x)-g(y)=g'(\alpha).(x-y)$

Puisque $(\forall x\in]a,b[)\quad g'(x)\neq0$ alors $g'(\alpha)\neq0$

Donc $g(x)-g(y)\neq0$

D'où $g(x)\neq g(y)$

Et par suite g est injective

2) Considérons la fonction h définie par : $(\forall x\in[a,b])\quad h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(x)$

- ✓ h est continue sur $[a,b]$ (car f et g sont continues sur $[a,b]$)
- ✓ h est dérivable sur $]a,b[$ (car f et g sont dérivables sur $]a,b[$)
- ✓ $h(a)=h(b)$ (un simple calcul)

D'après le théorème de Rolle : $(\exists c\in]a,b[)\quad h'(c)=0$

c.-à-d. $(\exists c\in]a,b[)\quad f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.g'(c)$

puisque $g'(c)\neq0$ alors $(\exists c\in]a,b[)\quad \dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Corrigé de l'exercice 8

Considérons la fonction $f : t \mapsto t^p$

Soit $n \in \mathbb{N}$

- ✓ f est continue sur $[n, n+1]$ ($p > 0$)
- ✓ f est dérivable sur $]n, n+1[$ ($p > 0$)

D'après le théorème des accroissements finis :

Il existe $c \in]n, n+1[$ tel que : $f(n+1) - f(n) = f'(c).(n+1-n) = f'(c)$

Or $f'(t) = p.t^{p-1} = \dfrac{p}{t^{1-p}}$

On a $n < c < n+1$ et la fonction $f' : t \mapsto \dfrac{p}{t^{1-p}}$ est décroissante ($p \in]0,1[$)

Donc $f'(n+1) \leq f'(c) \leq f'(n)$

Donc $f'(n+1) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n)$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\dfrac{p}{(n+1)^{1-p}} \leq (n+1)^p - n^p \leq \dfrac{p}{n^{1-p}}$

Corrigé de l'exercice 9

Soit $x > 0$

- ✓ La fonction "$Arc\tan$" est continue sur $[0, x]$ ("$Arc\tan$" est continue sur $\mathbb{R}$)
- ✓ La fonction "$Arc\tan$" est dérivable sur $]0, x[$ ("$Arc\tan$" est dérivable sur $\mathbb{R}$)

D'après le théorème des accroissements finis : il existe $c_x \in]0, x[$ tel que :

$Arc\tan(x) - Arc\tan(0) = Arc\tan'(c_x).(x-0)$

Donc : $Arc\tan(x) = \dfrac{x}{1+c_x^2}$

On a $0 < c_x < x$ donc $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+c_x^2} < 1$

Donc $\dfrac{x}{1+x^2} < \dfrac{x}{1+c_x^2} < x$

D'où $(\forall x > 0)$ $\dfrac{x}{1+x^2} < Arc\tan x < x$

つづく