

~ Tronc Commun ~  
L'ordre dans IR  
(Série #2 : 7 exercices résolus)

**Exercice 1 :**

Soit  $x$  un nombre réel de l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On pose  $A(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

- 1) Donner un encadrement du nombre  $A(x)$
- 2) a) Déterminer les deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $A(x) = a + \frac{b}{x+2}$   
b) Déterminer un autre encadrement du nombre  $A(x)$
- 3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de  $A(x)$

**Exercice 2 :**

- 1) Comparer  $2\sqrt{7}$  et  $3\sqrt{3}$
- 2) Développer  $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$
- 3) On pose  $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$   
Simplifier  $A$
- 4) Sachant que :  $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$  et  $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$   
Donner une approximation de  $A$  d'amplitude 0,5 par défaut et par excès

**Exercice 3 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $|a+2| \leq 1$  et  $0 \leq b \leq 2$

- 1) Encadrer le nombre  $a$  et montrer que  $|a+b+1| \leq 2$
- 2) On considère le nombre réel  $A$  tel que :  $A = ab - 2a + 3b$ .  
Vérifier que :  $A = (a+3)(b-2) + 6$  et montrer que  $2 \leq A \leq 6$

**Exercice 4 :**

Soit  $x \in [4;6]$ . On pose  $A = \frac{2x+3}{x-2}$ .

- 1) Donner un encadrement de  $A$
- 2) a. Vérifier que  $A = 2 + \frac{7}{x-2}$                       b. Donner un autre encadrement de  $A$

**Exercice 5 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $a \geq 2$ ,  $b \leq 5$  et  $b - a = 2$

- 1) Montrer que  $a \leq 3$  et  $4 \leq b$ .
- 2) Calculer le nombre  $A = \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(b-4)^2}$
- 3) Calculer le nombre  $B = |a+b-6| + |a+b-8|$

**Exercice 6 :**

Soit  $x$  un nombre réel.

- 1) Vérifier que :  $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
- 2) Soit  $x$  de l'intervalle  $[1;3]$   
Montrer que :  $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$
- 3) a. Sachant qu'on a :  $x \in [1;3]$

Montrer que :  $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$

b. En déduire que :  $\left| \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$

**Exercice 7 :**

Soit  $x$  un nombre réel .

On pose  $E = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) Montrer que :  $E - 1 = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$
- 2) En déduire que :  $|E - 1| \leq \frac{1}{2}x^2$

- 3) Trouver une valeur approchée du nombre  $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$  d'amplitude  $2 \times 10^{-4}$

## Corrigé de l'exercice 1 :

1) Soit  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc  $-1 \leq 2x \leq 2$

donc  $\boxed{2 \leq 2x+3 \leq 5}$

et  $\frac{3}{2} \leq x+2 \leq 3$

donc  $\boxed{\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{3}}$

d'où  $\frac{2}{3} \leq \frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{10}{3}$

Et par suite  $\boxed{\frac{2}{3} \leq A(x) \leq \frac{10}{3}}$

2) a) Soit  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a  $a + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$

$A(x) = a + \frac{b}{x+2}$  équivaut à  $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$

équivaut à  $2x+3 = ax+2a+b$

équivaut à  $\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 3 \end{cases}$

Donc  $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

D'où  $A(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$

b) Soit  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{3}$

donc  $-\frac{2}{3} \leq -\frac{1}{x+2} \leq -\frac{1}{3}$

$$\text{donc } \frac{4}{3} \leq 2 - \frac{1}{x+2} \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{et par suite } \boxed{\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}}$$

3)

$$\checkmark \text{ L'encadrement } \boxed{\frac{2}{3} \leq A(x) \leq \frac{10}{3}} \text{ a pour amplitude } \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\checkmark \text{ L'encadrement } \boxed{\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}} \text{ a pour amplitude } \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Donc le plus fin des deux encadrements précédents de  $A(x)$  est  $\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}$  ( car  $\frac{1}{3} < \frac{8}{3}$  )

### Corrigé de l'exercice 2 :

$$1) \text{ On a } (2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2 = 28 - 27 = 1$$

$$\text{Donc } (2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2 > 0$$

$$\text{Donc } (2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$$

$$\text{D'où } 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$$

$$2) (3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2(3\sqrt{3})(2\sqrt{7}) + (2\sqrt{7})^2 = 27 - 12\sqrt{21} + 28 = 55 - 12\sqrt{21}$$

$$3) \text{ On a } A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}} = \sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2} = |3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}|$$

$$\text{Puisque } 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7} < 0 \text{ alors } A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$$

$$4) \text{ On a } 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \text{ et } 2,6 < \sqrt{7} < 2,7$$

$$\text{Donc } 5,1 < 3\sqrt{3} < 5,4 \text{ et } 5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$$

$$\text{Donc } -5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1 \text{ et } 5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$$

$$\text{Donc } -0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$$

$$\text{Donc } -0,2 < A < 0,3$$

D'où  $-0,2$  est une approximation de  $A$  par défaut d'amplitude  $0,3 - (-0,2) = 0,5$

Et  $0,3$  est une approximation de  $A$  par excès d'amplitude  $0,3 - (-0,2) = 0,5$

## Corrigé de l'exercice 3 :

1) On a  $|a+2| \leq 1$

Donc  $-1 \leq a+2 \leq 1$

Donc  $-3 \leq a \leq -1$

Et on a  $0 \leq b \leq 2$

Donc  $-3 \leq a+b \leq 1$

Donc  $-2 \leq a+b+1 \leq 2$

Et par suite  $|a+b+1| \leq 2$

2)

✓  $(a+3)(b-2)+6 = ab-2a+3b-6+6 = ab-2a+3b = A$

✓ On  $-3 \leq a \leq -1$  donc  $0 \leq a+3 \leq 2$

Et on a  $0 \leq b \leq 2$  donc  $-2 \leq b-2 \leq 0$  donc  $0 \leq -(b-2) \leq 2$

Donc  $0 \leq -(a+3)(b-2) \leq 4$  donc  $-4 \leq (a+3)(b-2) \leq 0$

D'où  $2 \leq (a+3)(b-2)+6 \leq 6$

Et par suite  $2 \leq A \leq 6$

## Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soit  $x \in [4;6]$

On a  $4 \leq x \leq 6$  donc  $8 \leq 2x \leq 12$  donc  $\boxed{11 \leq 2x+3 \leq 15}$

Et  $2 \leq x-2 \leq 4$  donc  $\boxed{\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2}}$

D'où  $\boxed{\frac{11}{4} \leq \frac{2x+3}{x-2} \leq \frac{15}{2}}$

Et par suite  $\boxed{\frac{11}{4} \leq A \leq \frac{15}{2}}$

2) a)  $2 + \frac{7}{x-2} = \frac{2x-4+7}{x-2} = \frac{2x+3}{x-2} = A$

b) on a  $4 \leq x \leq 6$

donc  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2}$

$$\text{donc } \frac{7}{4} \leq \frac{7}{x-2} \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{donc } \frac{15}{4} \leq 2 + \frac{7}{x-2} \leq \frac{11}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{15}{4} \leq A \leq \frac{11}{2}}$$

### Corrigé de l'exercice 5 :

1)

$$\checkmark \text{ on a } b-a=2 \text{ donc } a=b-2$$

$$\text{et on a } b \leq 5 \text{ donc } b-2 \leq 3 \text{ donc } a \leq 3$$

$$\checkmark \text{ on a } b-a=2 \text{ donc } b=a+2$$

$$\text{et on a } a \geq 2 \text{ donc } a+2 \geq 4 \text{ donc } b \geq 4$$

$$2) A = \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(b-4)^2} = |a-3| + |b-4|$$

$$\text{On a } a \leq 3 \text{ donc } a-3 \leq 0 \text{ donc } |a-3| = 3-a$$

$$\text{Et on a } b \geq 4 \text{ donc } b-4 \geq 0 \text{ donc } |b-4| = b-4$$

$$\text{D'où } A = 3-a+b-4 = b-a-1 = 2-1 = 1$$

$$3) B = |a+b-6| + |a+b-8|$$

$$\text{On a } 2 \leq a \leq 3 \text{ et } 4 \leq b \leq 5$$

$$\text{Donc } 6 \leq a+b \leq 8$$

$$\text{Donc } 0 \leq a+b-6 \text{ et } a+b-8 \leq 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} |a+b-6| = a+b-6 \\ |a+b-8| = -a-b+8 \end{cases}$$

$$\text{Donc } B = a+b-6 - a-b+8$$

$$\text{D'où } B = 2$$

### Corrigé de l'exercice 6 :

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$

2) On a  $1 \leq x \leq 3$

$$\text{Donc } 0 \leq x-1 \leq 2$$

$$\text{Donc } 0 \leq (x-1)^2 \leq 4$$

$$\text{Donc } -1 \leq (x-1)^2 - 1 \leq 3$$

$$\text{d'ou } -1 \leq x^2 - 2x \leq 3$$

$$3) \text{ a) on a } -1 \leq x^2 - 2x \leq 3$$

$$\text{donc } 2 \leq x^2 - 2x + 3 \leq 6$$

$$\text{donc } \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{b) on a } \frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \left| \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$$

### Corrigé de l'exercice 7 :

$$1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} E-1 &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\ &= \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1+x^2})(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(1 + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1 - (1+x^2)}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \end{aligned}$$

$$2) \text{ On a } |E-1| = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$$

$$\text{On a } x^2 \geq 0$$

$$\text{Donc } 1+x^2 \geq 1 \text{ et } \sqrt{1+x^2} \geq 1$$

$$\text{Donc } \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 \geq 2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \leq \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{D'où } |E-1| \leq \frac{1}{2}x^2$$

3) On a pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $|E-1| \leq \frac{1}{2}x^2$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}x^2$$

Prenons  $x = 0,02$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{\sqrt{1+(0,02)^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}(0,02)^2$$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{\sqrt{1,0004}} - 1 \right| \leq 2 \times 10^{-4}$$

D'où 1 est une valeur approchée du nombre  $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$  d'amplitude  $2 \times 10^{-4}$

つづく