~ $1^{ère}$ année Sciences Mathématiques ~

Les ensembles et les applications

(Série #1 : 15 exercices résolus)

Exercice 1 :

On considère les deux ensembles suivants :

$A=\left\{\left(n,n^2\right)/n\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\left(2n,n\right)/n\in\mathbb{N}\right\}$

Déterminer $A\cap B$

Exercice 2 :

On considère les deux ensembles suivants :

$A=\left\{\frac{\pi}{4}+2\frac{k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{\pi}{2}+2\frac{k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Montrer que $A\cap B=\varnothing$

Exercice 3 :

Décrire $\mathscr{P}\left(\mathscr{P}\left(\{a\}\right)\right)$ où a désigne un élément

Exercice 4:

Soient $A,B,C\in\mathscr{P}(E)$. Etablir $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Exercice 5 :

Soient A,B,C et D des parties de E, montrer que :

$$\begin{cases}\overline{(B\setminus C)}\cup A=E\\ \overline{(C\setminus D)}\cup A=E\end{cases}\Rightarrow\quad (B\setminus D)\subset A$$

Exercice 6 :

Etant donné A et B deux parties de E, justifier : $C_E^A\setminus C_E^B=B\setminus A$

Exercice7 :

Etant donné A,B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

a) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$
b) $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 8 :

Soient A et B deux parties de E .
Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
Rappel : $A \Delta B$ est appelé différence symétrique de A et B
Et on a $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice 9 :

Etant donné A, B et C trois parties de E ,montrer que :

a) $A \Delta B = A \Delta C \quad \Leftrightarrow \quad B = C$
b) $A \setminus B = A \quad \Leftrightarrow \quad B \setminus A = B$
c) $A \Delta B = A \cap B \quad \Rightarrow \quad A = B = \varnothing$

Exercice 10 :

Soient A et B deux parties de E .
Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 11 :

Soient A et B deux parties de E .
Discuter et résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 12 :

Soient A et B deux parties de E .

1) Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$
2) Montrer que $\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ et que $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$
3) Montrer que si $\mathscr{P}(A \cup B) \subset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ alors $(A \subset B \quad ou \quad B \subset A)$

Exercice 13 :

Soient E et F deux ensembles . A et B deux parties de E , C et D deux parties de F .

1) Montrer que $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
2) Montrer que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Exercice 14 :

Soient E et F deux ensembles. A est une partie de E et B est une partie de F

1) Montrer que $C_E^A \times C_F^B \subset C_{E\times F}^{A\times B}$
2) Montrer que $C_{E\times F}^{A\times B} = E \times C_F^B \cup C_E^A \times F$

Exercice 15 :

Etant donné A, B et C trois parties de E ,montrer que :

1) $A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$
2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \cap C$

Corrigé de l'exercice 1

- Soit (x,y) un élément de $A \cap B$

  On a $(x,y) \in A$ donc il existe un entier naturel n tel que $x = n$ et $y = n^2$

  Et on a $(x,y) \in B$ donc il existe un entier naturel m tel que $x = 2m$ et $y = m$

  Donc $n = 2m$ et $m = n^2$

  D'où $m = 4m^2$ c-à-d $m = 0$ (car $m \in \mathbb{N}$)

- Si $m = 0$ alors $(x,y) = (0,0)$ et on a $(0,0) \in A \cap B$

Et par suite $A \cap B = \{(0,0)\}$

Corrigé de l'exercice 2

Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$

Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in A$ et $x_0 \in B$

Donc il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que : $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k_1\pi}{5} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k_2\pi}{5}$

Donc $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2k_1}{5} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2k_2}{5}$

Donc $k_1 - k_2 = \dfrac{-5}{8}$

Ce qui est absurde (car $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{-5}{8} \notin \mathbb{Z}$

Et par suite $A \cap B = \varnothing$

Corrigé de l'exercice 3

On a $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$ donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\}$

Corrigé de l'exercice 4

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$A \setminus (B \cap C) = A \cap C_E^{B \cap C} = A \cap \left(C_E^B \cup C_E^C\right) = \left(A \cap C_E^B\right) \cup \left(A \cap C_E^C\right) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Corrigé de l'exercice 5 :

On suppose que $\overline{(B \setminus C)} \cup A = E$ et $\overline{(C \setminus D)} \cup A = E$

Donc $(B \setminus C) \subset A$ et $(C \setminus D) \subset A$

Donc $(B \cap \overline{C}) \subset A$ et $(C \cap \overline{D}) \subset A$

Montrons que $(B \setminus D) \subset A$ c.-à-d. $(B \cap \overline{D}) \subset A$

Soit $x \in (B \cap \overline{D})$ c.-à-d. $x \in B$ et $x \in \overline{D}$

- Si $x \in C$ alors $x \in C \cap \overline{D}$ d'où $x \in A$ (car $C \cap \overline{D} \subset A$)
- Si $x \notin C$ alors $x \in B \cap \overline{C}$ d'où $x \in A$ (car $B \cap \overline{C} \subset A$)

Dans les deux cas on a : $x \in A$
Et par suite $(B \setminus D) \subset A$

Corrigé de l'exercice 6 :

$C_E^A \setminus C_E^B = C_E^A \cap C_E^{C_E^B} = B \cap C_E^A = B \setminus A$

Corrigé de l'exercice 7 :

Soient A, B et C trois parties de E

a) $(\Rightarrow)$ supposons que $A \subset B$

- On sait que $\underline{\underline{B \subset A \cup B}}$
- Soit $x \in A \cup B$
  Donc $x \in A$ *ou* $x \in B$
  - Si $x \in B$ (terminé)
  - Si $x \in A$ alors puisque $A \subset B$ on a $x \in B$
    Dans tous les cas on a $x \in B$
    ($x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$ donc $A \cup B \subset B$)
    D'où $\underline{\underline{A \cup B \subset B}}$

On conclut que $A \cup B = B$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $A \cup B = B$

On sait que $A \subset A \cup B$ et comme $A \cup B = B$ alors $A \subset B$

b) $(\Rightarrow)$ supposons que : $A = B$

Donc $A \cap B = B$ *et* $A \cup B = B$

D'où $A \cap B = A \cup B$

$(\Leftarrow)$ supposons que $A \cap B = A \cup B$

On a $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ et $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$

Donc $A \subset B$ *et* $B \subset A$

D'où $A = B$

c) $(\Rightarrow)$ Supposons $A \cup B = A \cap C$

On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$ donc $B \subset A \subset C$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $B \subset A \subset C$

Donc $A \cup B = A$ *et* $A \cap C = A$

Donc $A \cup B = A \cap C$

d) $(\Rightarrow)$ Supposons que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$

- Soit $x \in B$
  - Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$
  - Si $x \notin A$ alors sachant que $x \in A \cup B$ (car $x \in B$)
    on a $x \in A \cup C$ (car $A \cup B = A \cup C$)
    or $x \notin A$ donc $x \in C$

  Dans les deux cas $x \in C$ .Ainsi $B \subset C$
- De manière symétrique : $C \subset B$

D'où $B = C$

$(\Leftarrow)$ Si $B = C$

Il est évident que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$

Corrigé de l'exercice 8 :

Soit $x \in E$

$$\begin{array}{lll} x \in A\Delta B & \Leftrightarrow & (x \in A \quad et \quad x \notin B) \quad ou \quad (x \in B \quad et \quad x \notin A) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \quad ou \quad x \in B) \quad et \quad (x \in A \quad ou \quad x \notin A) \quad et \quad (x \notin B \quad ou \quad x \in B) \quad et \quad (x \notin B \quad ou \quad x \notin A) \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cup B \quad et \quad x \notin A \cap B \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{array}$$

Corrigé de l'exercice 9

a) $(\Rightarrow)$ Supposons que $A\Delta B = A\Delta C$

- Soit $x \in B$
  - Si $x \in A$ alors $x \notin A\Delta B$ donc $x \notin A\Delta C$ et puisque $x \in A$ alors $x \in C$
  - Si $x \notin A$ alors $x \in A\Delta B$ donc $x \in A\Delta C$ et puisque $x \notin A$ alors $x \in C$

  Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$
- De manière symétrique : $C \subset B$

$(\Leftarrow)$ Réciproque immédiate .

b)

$$\begin{array}{lll} A \setminus B = A & \Leftrightarrow & A \cap C_E^B = A \\ & \Leftrightarrow & A \subset C_E^B \end{array}$$

Or $A \subset C_E^B \quad \Leftrightarrow \quad B \subset C_E^A \quad \begin{pmatrix} \Leftrightarrow & B \cap C_E^A = B \\ \Leftrightarrow & B \setminus A = B \end{pmatrix}$

Et donc $A \setminus B = A \quad \Leftrightarrow \quad B \setminus A = B$

c) Supposons que $A\Delta B = A \cap B$

Donc :

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B$

Donc $A \cap B = \varnothing = A \cup B$

Donc $A = B = \varnothing$

D'où $A\Delta B = A \cap B \quad \Rightarrow \quad A = B = \varnothing$

Corrigé de l'exercice 10

$(\Rightarrow)$ supposons que $A \cup X = B$

- Si $A \not\subset B$ il est clair que l'équation n'a pas de solutions. $S = \varnothing$
- Si $A \subset B$ alors :
  $A \cup X = B \quad \Rightarrow \quad X \subset B \quad et \quad B \setminus A \subset X$

$(\Leftarrow)$ inversement ok

Ainsi $S = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) / (B \setminus A) \subset X \subset B \right\}$

Corrigé de l'exercice 11

$(\Rightarrow)$ supposons que $A \cap X = B$

- Si $B \not\subset A$ alors l'équation n'a pas de solutions
- Si $B \subset A$
  On a $X = (A \cap X) \cup \left(\overline{A} \cap X\right) = B \cup C$ avec $C = \overline{A} \cap X \subset \overline{A}$

$(\Leftarrow)$ inversement

Si $X = B \cup C$ avec $C \subset \overline{A}$
Alors $A \cap X = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup \varnothing = B$
(car $A \cap B = B$ et $C \subset \overline{A}$)
Ainsi $S = \left\{ X = B \cup C / C \subset \overline{A} \right\} = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) / B \subset X \subset B \cup \overline{A} \right\}$

Corrigé de l'exercice 12

1)

- On suppose que $A \subset B$
  Soit $X \in \mathcal{P}(A)$
  On a $X \subset A$ et puisque $A \subset B$ alors $X \subset B$
  D'où $X \in \mathcal{P}(B)$ c.-à-d. $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$
- Supposons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$
  On a $A \in \mathcal{P}(A)$ et puisque $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ alors $A \in \mathcal{P}(B)$ c.-à-d. $A \subset B$

Et par suite $A \subset B$ équivaut à $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

2)

✓ On a $A \cap B \subset A$

D'après le résultat de la question 1) , on aura : $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A)$

et De manière symétrique : $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(B)$

donc $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

✓ On a $A \subset A \cup B$

D'après le résultat de la question 1) , on aura : $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

et De manière symétrique : $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

donc $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

3) Supposons que $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

On a $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$

Et puisque $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ alors $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ ou $A \cup B \in \mathcal{P}(B)$

D'où $A \cup B \subset A$ ou $A \cup B \subset B$

Et puisque $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ alors $A \cup B = A$ ou $A \cup B = B$

Donc $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Corrigé de l'exercice 13

1)

- Soit (x, y) un élément de $(A \cap B) \times (C \cap D)$

  On a $x \in A \cap B$ et $y \in C \cap D$

  Donc $x \in A$ et $x \in B$ et $y \in C$ et $y \in D$

  Donc $(x, y) \in A \times C$ et $(x, y) \in B \times D$

  D'où $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

  Et par suite $(A \cap B) \times (C \cap D) \subset (A \times C) \cap (B \times D)$

- Soit (x, y) un élément de $(A \times C) \cap (B \times D)$

  On a $(x, y) \in A \times C$ et $(x, y) \in B \times D$

  Donc $x \in A$ et $y \in C$ et $x \in B$ et $y \in D$

  Donc $x \in A \cap B$ et $y \in C \cap D$

  Donc $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

  Et par suite $(A \times C) \cap (B \times D) \subset (A \cap B) \times (C \cap D)$

2)

- Soit (x,y) un élément de $(A\cup B)\times C$

  On a $x\in A\cup B$ et $y\in C$

  Donc $(x\in A \quad ou \quad x\in B)$ et $y\in C$

  Donc $(x\in A \quad et \quad y\in C)$ ou $(x\in B \quad et \quad y\in C)$

  Donc $(x,y)\in A\times C$ ou $(x,y)\in B\times C$

  D'où $(x,y)\in (A\times C)\cup(B\times C)$

  Et par suite $(A\cup B)\times C\subset (A\times C)\cup(B\times C)$

- Soit (x,y) un élément de $(A\times C)\cup(B\times C)$

  On a $(x,y)\in A\times C$ ou $(x,y)\in B\times C$

  Donc $(x\in A \quad et \quad y\in C)$ ou $(x\in B \quad et \quad y\in C)$

  Donc $(x\in A \quad ou \quad x\in B)$ et $y\in C$

  Donc $x\in A\cup B$ et $y\in C$

  D'où $(x,y)\in (A\cup B)\times C$

  Et par suite $(A\times C)\cup(B\times C)\subset (A\cup B)\times C$

Corrigé de l'exercice 14

1) Soit (x,y) un élément de $C_E^A\times C_F^B$

   On a $x\in C_E^A$ et $y\in C_F^B$

   Donc $x\notin A$ et $y\notin B$

   Donc $(x,y)\notin A\times B$

   D'où $(x,y)\in C_{E\times F}^{A\times B}$

   Et par suite $C_E^A\times C_F^B\subset C_{E\times F}^{A\times B}$

2)

- Soit (x,y) un élément de $C_{E\times F}^{A\times B}$

  On a $(x,y)\notin A\times B$

  Donc $(x\notin A \quad ou \quad y\notin B)$

  Donc $(x\notin A \quad et \quad y\in F)$ ou $(x\in E \quad et \quad y\notin B)$

  Donc $(x,y)\in C_E^A\times F$ et $(x,y)\in E\times C_F^B$

D'où $(x,y)\in C_E^A\times F\cup E\times C_F^B$

Et par suite $C_{E\times F}^{A\times B}\subset C_E^A\times F\cup E\times C_F^B$

- Soit (x,y) un élément de $C_E^A\times F\cup E\times C_F^B$

On a $(x,y)\in C_E^A\times F$ et $(x,y)\in E\times C_F^B$

Donc $x\in C_E^A$ et $y\in C_F^B$

Donc $x\notin A$ et $y\notin B$

Donc $(x,y)\notin A\times B$

D'où $(x,y)\in C_{E\times F}^{A\times B}$

Et par suite $C_E^A\times F\cup E\times C_F^B\subset C_{E\times F}^{A\times B}$

Corrigé de l'exercice 15

1)

$$\begin{aligned}(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C}) &= \left[(A\cap B)\cap(C\cup\overline{C})\right]\cup\left[(A\cap\overline{B})\cap(C\cup\overline{C})\right]\\ &=((A\cap B)\cap E)\cup((A\cap\overline{B})\cap E)\\ &=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\\ &=A\cap(B\cup\overline{B})\\ &=A\cap E\\ &=A\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) &= \left[B\cup(A\cap C)\right]\cap(C\cup A)\\ &=(B\cap(C\cup A))\cup((A\cap C)\cap(C\cup A))\\ &=(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

3)

-

$$
\begin{aligned}
A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C} \quad &\Rightarrow \quad \overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A\cap\overline{C}}\\
&\Rightarrow \quad \overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}\\
&\Rightarrow \quad \overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C\\
&\Rightarrow \quad A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)=A\cap\left(\overline{A}\cup C\right)\\
&\Rightarrow \quad \underbrace{\left(A\cap\overline{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left(A\cap B\right)=\underbrace{\left(A\cap\overline{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left(A\cap C\right)\\
&\Rightarrow \quad A\cap B=A\cap C
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
A\cap B=A\cap C \quad &\Rightarrow \quad A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}\\
&\Rightarrow \quad A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}
\end{aligned}
$$

(D’après l’implication précédente)

つづく