~ $1^{ère}$ *Sciences Exp. & Mathématiques* ~

Série : La logique

(24 exercices résolus)

Exercice 1 :

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1. $\left((-4)^2 = 16\right) \quad et \quad \left(\sqrt{16} = -4\right)$
2. $(\pi \in \mathbb{Q}) \quad ou \quad \left(\sqrt{8} + \sqrt{7} \geq \sqrt{15}\right)$
3. $(a \in \mathbb{Z}) \quad (a \quad premier \quad \Rightarrow \quad a \quad impair)$
4. $(x \in \mathbb{R}) \quad \left(x^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5\right)$

Exercice 2 :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x \geq 0 \quad ou \quad x \leq 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{N}) \quad \left(x + 1 > x^2\right)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\exists a \in \mathbb{R}) \quad x < a < x + 1$
4. $(\forall x \in \mathbb{N}) \quad (x \neq 1 \Rightarrow x > 1)$
5. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left(\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1\right)$

Exercice 3 :

Ecrire les Propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :

1. Pour tout entier naturel n, il existe au moins un entier naturel k tel que $k \leq n$
2. Le carré de tout réel est positif
3. Il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$
4. L'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$
5. La somme de deux côtés d'un triangle est supérieur strictement au troisième côté.

Exercice 4 :

On considère la proposition suivante : $(P) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \quad (\exists x \in \mathbb{R}) : \quad x^2 + xy + y^2 = 0$

1. Ecrire la négation de (P)
2. Montrer que (P) est fausse

Exercice 5 :

1. Ecrire la négation de $(P):\forall x\in\mathbb{R}^{+}\quad "x\geq 0\quad et\quad x^{2}-x+1>0"$
2. Montrer que (P) est vraie

Exercice 6 :

On considère la proposition suivante :

$$(P)\quad (\forall x\in[0,2])\quad \left(\exists y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\right):\quad xy-x+2y-1=0$$

1. Ecrire la négation de (P)
2. Montrer que (P) est vraie

Exercice 7 :

Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists x\in\mathbb{R},\quad \forall y\in\mathbb{R},\quad x+y>0$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad \exists y\in\mathbb{R},\quad x+y>0$
3. $\exists x\in\mathbb{R},\quad \forall y\in\mathbb{R},\quad y^{2}>x$
4. $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\quad \exists \alpha\in\mathbb{R}^{+*},\quad |x|<\alpha\Rightarrow |x^{2}|<\varepsilon$

   Les assertions1,2,3 et 4 sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 8 :

Montrer l'implication suivante : $1+xy=x+y\Rightarrow x=1\quad ou\quad y=1$

Exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^{2}$ le système : $(S)\quad \begin{cases}(x+1)(y-4)=0\\(x-3)(y+2)=0\end{cases}$

Exercice 10 :

Soient a,b et c trois réels strictement positifs , qui vérifient : $abc>1$ et $a+b+c<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Montrer que :

1. Tous ces nombres sont différents de 1
2. L'un de ces nombres est inférieur à 1

Exercice 11 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(1)\quad \sqrt{x^{2}-5x+6}>x+4$

Exercice 12 :

Soit n un entier naturel .
Montrer que si $2n+1$ est un carré parfait alors $(n+1)$ est somme de deux carrés parfaits

Exercice 13 :

Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $]-1,1[$. Montrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in]-1,1[$

Exercice 14 :

Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0): \quad |a| \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Exercice 15 :

Soient x et y deux réels appartenant à l'intervalle $]1,+\infty[$
Montrer que : $x \ne y \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x \ne y^2 - 2y$

Exercice 16 :

1. Montrer que : $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right) \quad a^2 + b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad et \quad b = 0$
2. Soient x et y deux réels positifs , montrer que :
   $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad x = y = 1$

Exercice 17 :

1. Soit n un entier naturel .
   Montrer que : $n \quad est \quad pair \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \quad est \quad pair$
2. a) Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   b) Montrer que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 18 :

Soient x et y deux réels, montrer que :

$$(xy \ne 1 \quad et \quad x \ne y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+x+1} \ne \frac{y}{y^2+y+1}$$

Exercice 19 :

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2+1} + x > 0$

Exercice 20 :

Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 21 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 22 :

Trouver un entier naturel p tel que si : $n > p$ alors $\dfrac{n^2-9\sqrt{n}}{n^2+1}$ appartient à l'intervalle ouvert de centre 1 et de rayon 10^{-5}

Exercice 23 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$
Montrer que f est ni pair ni impair.

Exercice 24 :

Montrer par récurrence que :

1. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1+2+.......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2+2^2+.......+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^3+2^3+.......+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1\times 2+2\times 3+.......+n\times(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
5. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1+3+5+.......+(2n+1) = (n+1)^2$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1+7+7^2+.......+7^n = \dfrac{7^{n+1}-1}{6}$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7
9. $(\forall n \geq 4) \quad 2^n \geq n^2$
10. $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

Corrigé de l'exercice 1

1. La proposition $\left((-4)^2 = 16\right)$ est vraie et la proposition $\left(\sqrt{16} = -4\right)$ est fausse (car $\sqrt{16} > 0$)

   Donc la proposition $\left((-4)^2 = 16\right) \quad et \quad \left(\sqrt{16} = -4\right)$ est fausse.
2. La proposition $(\pi \in \mathbb{Q})$ est fausse (π est un nombre irrationnel) et la proposition $\left(\sqrt{8} + \sqrt{7} \geq \sqrt{15}\right)$ est vraie (car : $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2 \quad \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}\right)$)

   Donc la proposition $(\pi \in \mathbb{Q}) \quad ou \quad \left(\sqrt{8} + \sqrt{7} \geq \sqrt{15}\right)$ est vraie .
3. La proposition $(a \in \mathbb{Z}) \quad (a \quad premier \quad \Rightarrow \quad a \quad impair)$ est fausse

   Car $(2 \in \mathbb{Z}) \quad (2 \quad premier \quad et \quad a \quad pair)$.
4. La proposition $(x \in \mathbb{R}) \quad \left(x^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5\right)$ est fausse

   Car $(-5)^2 = 25 \quad et \quad -5 \neq 5$.

Corrigé de l'exercice 2

1. $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad (x < 0 \quad et \quad x > 0)$
2. $(\forall x \in \mathbb{N}) \quad \left(x + 1 \leq x^2\right)$
3. $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad x \geq a \quad ou \quad a \geq x + 1$
4. $(\exists x \in \mathbb{N}) \quad (x \neq 1 \quad et \quad x \leq 1)$
5. $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad \left(\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 \quad et \quad x < 1\right) \quad ou \quad \left(\sqrt{x^2 + 3} < 2 \quad et \quad x \geq 1\right)$

Corrigé de l'exercice 3

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k \leq n$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \neq 0$
4. $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0$

5. Si ABC est un triangle alors $AB + AC > BC$

Corrigé de l'exercice 4

1. $\left(\overline{P}\right)$ $\left(\exists y \in \mathbb{R}\right)$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$: $x^2 + xy + y^2 \neq 0$
2. On a $\left(\overline{P}\right)$ $\left(\exists y \in \mathbb{R}\right)$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$: $x^2 + xy + y^2 \neq 0$

   On considère $y = 1$, on a : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$ $x^2 + x + 1 \neq 0$ (car $\Delta = -3 < 0$)

   Donc $\left(\overline{P}\right)$ est vraie

   D'où $\left(P\right)$ est fausse .

Corrigé de l'exercice 5

1. $\left(\overline{P}\right)$: $\exists x \in \mathbb{R}^+$ "$x < 0$ *ou* $x^2 - x + 1 \leq 0$"
2. On considère le trinôme $x^2 - x + 1$

   On a : $\Delta = -3$ donc $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$ $x^2 - x + 1 > 0$

   Donc $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$ $x^2 - x + 1 > 0$

   D'où $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$ $x \geq 0$ *et* $x^2 - x + 1 > 0$

   Et par suite la proposition $\left(P\right)$ est vraie.

Corrigé de l'exercice 6

1. $\left(\overline{P}\right)$ $\left(\exists x \in [0,2]\right)$ $\left(\forall y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right)$: $xy - x + 2y - 1 \neq 0$
2. Montrons que $\left(P\right)$ est vraie.

   Soit $x \in [0,2]$

   On a :

$$\begin{aligned} xy - x + 2y - 1 = 0 &\Leftrightarrow xy + 2y = x + 1 \\ &\Leftrightarrow y(x+2) = x+1 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x+2-1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 0 \le x \le 2 &\Leftrightarrow 2 \le x+2 \le 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x+2} \le \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{-1}{x+2} \le -\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{x+2} \le \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc (P) $\left(\forall x \in [0,2]\right)$ $\left(\exists y = 1 - \dfrac{1}{x+2} \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right]\right)$: $xy - x + 2y - 1 = 0$

D'où (P) est vraie.

Corrigé de l'exercice 7

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$ est fausse . car sa négation $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \le 0$ est vraie . Etant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \le 0$, par exemple on peut prendre $y = -x - 2$ et alors $x + y = x - x - 2 = -2 \le 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$ est vraie , pour un x donné , on peut prendre par exemple $y = -x + 3$ et alors $x + y = x - x + 3 = 3 > 0$.
   La négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \le 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x$ est vraie , on peut prendre $x = -1$.
   La négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \le x$

4. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$ est vraie . on peut prendre par exemple $\alpha = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+*}$.
   La négation : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad |x| < \alpha \quad et \quad |x^2| \geq \varepsilon$

Corrigé de l'exercice 8

$$\begin{aligned} 1+xy = x+y \quad &\Rightarrow \quad 1+xy-x-y=0 \\ &\Rightarrow \quad (1-x)(1-y)=0 \\ &\Rightarrow \quad 1-x=0 \quad ou \quad 1-y=0 \\ &\Rightarrow \quad x=1 \quad ou \quad y=1 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9

Soit S l'ensemble des solutions du système (S)

$$\begin{aligned} (x,y)\in(S) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)(y-4)=0 \\ (x-3)(y+2)=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} [x+1=0 \quad ou \quad y-4=0] \\ [x-3=0 \quad ou \quad y+2=0] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad [x+1=0 \quad ou \quad y-4=0] \quad et \quad [x-3=0 \quad ou \quad y+2=0] \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1=0 \\ x-3=0 \end{cases} ou \begin{cases} x+1=0 \\ y+2=0 \end{cases} ou \begin{cases} y-4=0 \\ x-3=0 \end{cases} ou \begin{cases} y-4=0 \\ y+2=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}}_{(impossible)} ou \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} ou \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases} ou \underbrace{\begin{cases} y=4 \\ y=-2 \end{cases}}_{(impossible)} \end{aligned}$$

D'où : $S = \{(-1,-2);(3,4)\}$

Corrigé de l'exercice 10

1. Montrons que la proposition (P)"$a \neq 1 \quad et \quad b \neq 1 \quad et \quad c \neq 1$" est vraie.

   On suppose que : $(\overline{P})$"$a = 1 \quad ou \quad b = 1 \quad ou \quad c = 1$"

   Par exemple : $a = 1$

   Donc $b + c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad et \quad bc > 1$

   Donc $(b+c)bc < (b+c) \quad et \quad bc > 1 \qquad ((b+c) > 0)$

   Donc $bc < 1 \quad et \quad bc > 1$ ce qui est absurde .

   Donc $(\overline{P})$ est fausse

   D'où (P) est vraie.

2. Montrons que la proposition (Q)"$a < 1 \quad ou \quad b < 1 \quad ou \quad c < 1$" est vraie

   On suppose que : $(\overline{Q})$"$a \geq 1 \quad et \quad b \geq 1 \quad et \quad c \geq 1$"

   On a $a \geq 1 \quad et \quad b \geq 1 \quad et \quad c \geq 1$

   Donc $\frac{1}{a} \leq 1 \quad et \quad \frac{1}{b} \leq 1 \quad et \quad \frac{1}{c} \leq 1$

   Donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \quad et \quad a + b + c \geq 3$

   Donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a + b + c$

   Ce qui est absurde (car on a : $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$)

   Donc $(\overline{Q})$ est fausse

   D'où (Q) est vraie .

Corrigé de l'exercice 11

L'inéquation $(1) \quad \sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$ est définie si et seulement si $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, 2\right] \cup \left[3, +\infty\right[\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1)

<u>1^{er}cas</u> : si $x+4\geq 0$ c-à-d $\boxed{x\geq -4}$ alors :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6>x^2+8x+16 \\ x\in]-\infty,2]\cup[3,+\infty[\quad et \quad x\geq -4 \end{cases}$$

$$x\in S \Leftrightarrow \begin{cases} -13x>10 \\ x\in]-\infty,2]\cup[3,+\infty[\quad et \quad x\geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{-10}{13} \\ x\in]-\infty,2]\cup[3,+\infty[\quad et \quad x\geq -4 \end{cases}$$

Donc : $x\in S \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,\dfrac{-10}{13}\right[\quad et \quad x\geq -4$

D'où l'ensemble des solutions de (1) sur $[-4,+\infty[$ est : $S_1=\left[-4,-\dfrac{10}{13}\right[$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : si $x+4<0$ c-à-d $\boxed{x<-4}$ alors :

Puisque $\sqrt{x^2-5x+6}>0$ et $x+4<0$ alors (1) est toujours vérifiée

D'ou l'ensemble des solutions de (1) est : $S_2=]-\infty,-4[$

Et par suite l'ensemble des solutions de (1) est : $S=S_1\cup S_2=\left]-\infty,-\dfrac{10}{13}\right[$

Corrigé de l'exercice 12

Soit n un entier naturel

$2n+1$ est un carré parfait (et aussi impair) $\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N}): 2n+1=(2k+1)^2$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N}): 2n+1=4k^2+4k+1$$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N}): n=2k^2+2k$$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N}): n+1=k^2+k^2+2k+1$$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N}): n+1=k^2+(k+1)^2$$

Donc si $2n+1$ est un carré parfait alors $(n+1)$ est somme de deux carrés parfaits.

Corrigé de l'exercice 13

Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $]-1,1[$

On a $ab \neq -1$ car $|a|<1 \quad et \quad |b|<1$

On a :

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \iff |a+b|<|1+ab|$$
$$\iff a^2+b^2+2ab<1+a^2b^2+2ab$$
$$\iff (a^2-1)(1-b^2)<0$$

Donc $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \iff (a^2-1)(1-b^2)<0$

Puisque $|a|<1 \quad et \quad |b|<1$ alors $(a^2-1)(1-b^2)<0$

Donc $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$

Corrigé de l'exercice 14

Montrons que $a\neq 0 \Rightarrow (\exists\varepsilon>0): \ |a|>\varepsilon$

On suppose que $a\neq 0$

Donc $|a|>0$

Et par suite il existe un réel ε tel que $|a|>\varepsilon>0$ c-à-d $(\exists\varepsilon>0):|a|>\varepsilon$

Donc on a : $a\neq 0 \Rightarrow (\exists\varepsilon>0): \ |a|>\varepsilon$

D'où $(\forall\varepsilon>0): \ |a|\leq\varepsilon \Rightarrow a=0$

Corrigé de l'exercice 15 : (Raisonnement par contraposée)

Soient x et y deux réels appartenant à l'intervalle $]1,+\infty[$

La proposition $x\neq y \Rightarrow x^2-2x\neq y^2-2y$

Equivaut à $x^2-2x=y^2-2y \Rightarrow x=y$?

$x^2-2x=y^2-2y \Rightarrow x^2-y^2-2x+2y=0$

$$\Rightarrow \quad (x-y)(x+y)-2(x-y)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-y)(x+y-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-y=0 \quad ou \quad x+y-2=0$$
$$\Rightarrow \quad x=y \quad ou \quad x+y=2$$

Puisque $x>1$ et $y>1$ alors $x+y>2$

Donc $x^2-2x=y^2-2y \quad \Rightarrow \quad x=y$

Et par suite $x \neq y \quad \Rightarrow \quad x^2-2x \neq y^2-2y$

Corrigé de l'exercice 16

1. Soient a et b deux réels tels que $a^2+b^2=0$ alors $a^2=-b^2$
   On a $a^2 \geq 0$ et $a^2=-b^2$
   Donc $a^2 \geq 0$ et $a^2 \leq 0$ (car $-b^2 \leq 0$)
   Par suite $a^2=0$
   On a $a^2+b^2=0$ et $a^2=0$ donc $a^2=0$ et $b^2=0$
   D'où $a=0$ et $b=0$.

2. Soient x et y deux réels positifs :
   $$\begin{aligned} x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y} \quad &\Rightarrow \quad x+y+2-2\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0 \\ &\Rightarrow \quad x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0 \\ &\Rightarrow \quad \left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x}-1=0 \quad et \quad \sqrt{y}-1=0 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x}=1 \quad et \quad \sqrt{y}=1 \\ &\Rightarrow \quad x=1 \quad et \quad y=1 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

1. Soit n un entier naturel .

Montrons que : $n \quad est \quad pair \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \quad est \quad pair$

$\Rightarrow|$ supposons que n est pair

Donc il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$

Donc il existe un entier naturel k tel que $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2.(2k^2) = 2.k'$ (avec $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$)

D'où n^2 est pair.

$|\Leftarrow$ (raisonnement par contraposée)

supposons que n est impair

Donc il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$

Donc il existe un entier naturel k tel que

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2.(2k^2 + 2k) = 2.k' + 1$

(avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$)

D'où n^2 est impair.

2. a) (Raisonnement par l'absurde)

supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

donc il existe deux entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$

donc $p^2 = 2q^2$

donc p^2 est <u>pair</u>

donc d'après le résultat de la première question , on a : p est pair

donc $p = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$

l'égalité $p^2 = 2q^2$ devient $(2k)^2 = 2q^2$

donc $q^2 = 2.k^2$

donc q^2 est <u>pair</u>

ce qui est absurde (car $p \wedge q = 1$)

et par suite $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

donc il existe deux entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$

donc $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$

donc $5+2\sqrt{6}=\dfrac{p^2}{q^2}$

d'où $2\sqrt{6}=\dfrac{p^2}{q^2}-5$

donc $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ (même méthode qu'on a utiliser à 2)a))

et par suite $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Corrigé de l'exercice 18 : (raisonnement par contraposée)

Soient x et y deux réels, montrer que :

$$(xy \neq 1 \quad et \quad x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

Pour cela on va montrer que : $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow (xy=1 \quad ou \quad x=y)$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1} &\Rightarrow xy^2+xy+x=x^2y+xy+y \\
&\Rightarrow xy^2-x^2y+x-y=0 \\
&\Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0 \\
&\Rightarrow (y-x)(xy-1)=0 \\
&\Rightarrow y-x=0 \quad ou \quad xy-1=0 \\
&\Rightarrow x=y \quad ou \quad xy=1
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 19 : (Raisonnement par disjonction des cas)

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2+1}+x>0$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

<u>1er cas :</u> si $x \geq 0$

alors $\sqrt{x^2+1}+x>0$ (car $\sqrt{x^2+1}>0$ et $x \geq 0$)

<u>2ème cas</u> : Si $x<0$

Il est clair que $x^2+1>x^2$ donc $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$

Donc $\sqrt{x^2+1}>|x|$

donc $\sqrt{x^2+1}>-x$ (car $|x|=-x \quad (x<0)$)

d'où $\sqrt{x^2+1}+x>0$

et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2+1}+x>0$

Corrigé de l'exercice 20 : (Raisonnement par disjonction des cas)

Montrons que $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

<u>1er cas</u> : si $n=3k \quad (k \in \mathbb{N})$

$n(n+1)(n+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}$

<u>2ème cas</u> : si $n=3k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) &= (3k+1)(3k+2)(3k+3) \\ &= 3.\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)} \end{aligned}$$

<u>3ème cas</u> : si $n=3k+2 \quad (k \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) &= (3k+2)(3k+3)(3k+4) \\ &= 3.\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)} \end{aligned}$$

D'où $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3 pour tout n de $\mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Supposons que $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$

Donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / \sqrt{n^2+1} = k \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / n^2+1 = k^2 \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / 1 = k^2 - n^2 \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / 1 = (k-n)(k+n) \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / k-n = \frac{1}{k+n} \\
&\Rightarrow n < k \quad et \quad k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow n < k \quad et \quad n+k > 1 \quad et \quad k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow n < k \quad et \quad \frac{1}{k+n} < 1 \quad et \quad k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow n < k \quad et \quad k-n < 1 \quad et \quad k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow n < k \quad et \quad k < n+1 \quad et \quad k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow n < k < n+1 \quad et \quad k \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde car il n'existe aucun entier copris entre deux entiers successifs .

Et par suite $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier

Corrigé de l'exercice 22

On a

$$\begin{aligned}
(*) : \left| \frac{n^2 - 9\sqrt{n}}{n^2+1} - 1 \right| < 10^{-5} &\Leftrightarrow \left| \frac{n^2+1-1-9\sqrt{n}}{n^2+1} - 1 \right| < 10^{-5} \\
&\Leftrightarrow \frac{1+9\sqrt{n}}{n^2+1} < 10^{-5}
\end{aligned}$$

Et on a $\dfrac{1+9\sqrt{n}}{n^2+1} = \dfrac{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{9}{n\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{n^2}} < \dfrac{10}{n\sqrt{n}}$

Donc il suffit que $\dfrac{10}{n\sqrt{n}} < 10^{-5}$ c-à-d $n > 10^4$.

On pose $p = 10^4$

$$n > p = 10^4 \Rightarrow \frac{10}{n\sqrt{n}} < 10^{-5}$$
$$\Rightarrow \frac{1+9\sqrt{n}}{n^2+1} < 10^{-5}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{n^2-9\sqrt{n}}{n^2+1} - 1\right| < 10^{-5}$$

Corrigé de l'exercice 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$

On a $f(-2) = 13 \quad et \quad f(2) = 9 \quad et \quad -f(2) = -9$

Puisque $f(-2) \neq f(2)$ alors f n'est pas pair et puisque $f(-2) \neq -f(2)$ alors f n'est pas impair .

Corrigé de l'exercice 24

1. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1+2+.......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   - ✓ Pour $n = 1$ on a : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$
   - ✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$
     - Supposons que $1+2+.......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
     - Et montrons que : $1+2+.......+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a :

$$\underbrace{1+2+.......+n}_{H.R}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

✓ On déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1+2+.......+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2+2^2+.......+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

✓ Pour $n=1$ on a : $1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Supposons que $1^2+2^2+.......+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Et montrons que : $1^2+2^2+.......+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

On a :

$$\underbrace{1^2+2^2+.....+n^2}_{H.R}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

✓ On déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2+2^2+.......+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^3+2^3+.......+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

- ✓ Pour $n=1$ on a : $1^3=\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2$
- ✓ Soit $n\in\mathbb{N}^*$
  - Supposons que : $1^3+2^3+.......+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$
  - Et montrons que : $1^3+2^3+.......+(n+1)^3=\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

On a :

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^3+2^3+.......+n^3}_{H.R}+(n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\\
&= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

✓ On déduit que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 1^3+2^3+.......+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4. Montrons par récurrence que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 1\times2+2\times3+.......+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

- ✓ Pour $n=1$ on a : $1\times2=\dfrac{1}{3}\times1\times(1+1)\times(1+2)$
- ✓ Soit $n\in\mathbb{N}^*$

- Supposons que : $1\times2+2\times3+.......+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
- Et montrons que :

$$1\times2+2\times3+.......+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

On a :

$$\begin{aligned}\underbrace{1\times2+2\times3+.......+n\times(n+1)}_{H.R}+(n+1)\times(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

✓ On déduit que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 1\times2+2\times3+.......+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

5. Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1+3+5+.......+(2n+1)=(n+1)^2$

✓ Pour $n=0$: $1=(0+1)^2$

✓ Soit $n\in\mathbb{N}$

- Supposons que : $1+3+5+.......+(2n+1)=(n+1)^2$
- Et montrons que : $1+3+5+.......+(2n+3)=(n+2)^2$

On a :

$$\begin{aligned}\underbrace{1+3+5+.......+(2n+1)}_{H.R}+(2n+3) &= (n+1)^2+(2n+3)\\ &= n^2+2n+1+2n+3\\ &= n^2+4n+4\\ &= (n+2)^2\end{aligned}$$

✓ On déduit : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1+3+5+.......+(2n+1)=(n+1)^2$

6. Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1+7+7^2+.......+7^n=\frac{7^{n+1}-1}{6}$

- ✓ Pour $n=0$: $1=\dfrac{7^{0+1}-1}{6}$
- ✓ Soit $n\in\mathbb{N}$
  - Supposons que : $1+7+7^2+.......+7^n=\dfrac{7^{n+1}-1}{6}$
  - Et montrons que : $1+7+7^2+.......+7^{n+1}=\dfrac{7^{n+2}-1}{6}$

On a :

$$\underbrace{1+7+7^2+.......+7^n}_{H.R}+7^{n+1}=\frac{7^{n+1}-1}{6}+7^{n+1}$$
$$=\frac{7^{n+1}-1+6\times7^{n+1}}{6}$$
$$=\frac{7\times7^{n+1}-1}{6}$$
$$=\frac{7^{n+2}-1}{6}$$

- ✓ On déduit que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1+7+7^2+.......+7^n=\dfrac{7^{n+1}-1}{6}$

7. Montrons que : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: 4^n+6n-1 est divisible par 9
   - ✓ Pour $n=0$: $4^0+6(0)-1=0$ donc divisible par 9
   - ✓ soit $n\in\mathbb{N}$:
     - supposons que : 4^n+6n-1 est divisible par 9
     - et montrons que : $4^{n+1}+6(n+1)-1$ est divisible par 9

   on a d'après l'hypothèse de récurrence 4^n+6n-1 est divisible par 9

   donc il existe un entier naturel k : tel que $4^n+6n-1=9\times k$

   et on a :

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4^{n+1}+6n+6-1$$
$$=4\times4^n+6n+5$$
$$=4\times\left(4^n+6n-1\right)-18n+9$$
$$=4\times(9k)-18n+9$$
$$=9\times\underbrace{(4k-2n+1)}_{k'}=9\times k'$$

Donc $4^{n+1}+6(n+1)-1$ est divisible par 9

- ✓ on déduit que : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $4^{n}+6n-1$ est divisible par 9

8. Montrons que : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7
   - ✓ Pour $n=0$: $3^{2(0)+1}+2^{(0)+2}=7$ donc divisible par 7
   - ✓ soit $n\in\mathbb{N}$:
     - supposons que : $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7
     - Et montrons que : $3^{2n+3}+2^{n+3}$ est divisible par 7

on a d'après l'hypothèse de récurrence $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7

donc il existe un entier naturel k : tel que $3^{2n+1}+2^{n+2}=7\times k$

et on a :

$$\begin{aligned}3^{2n+3}+2^{n+3} &= 3^{2}\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}\\ &= 9\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}\\ &= (7+2)\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}\\ &= 7\times 3^{2n+1}+2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}\\ &= 7\times 3^{2n+1}+2\times\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)\\ &= 7\times 3^{2n+1}+2\times 7k\\ &= 7\times\left(\underbrace{3^{2n+1}+2k}_{k'}\right)\\ &= 7k'\end{aligned}$$

- ✓ On déduit que : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7

9. Montrons que : $(\forall n\geq 4)\quad 2^{n}\geq n^{2}$
   - ✓ Pour $n=4$: $2^{4}\geq 4^{2}$
   - ✓ Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 4$
     - Supposons que $2^{n}\geq n^{2}$
     - Et montrons que $2^{n+1}\geq (n+1)^{2}$

   On a : $2^{n+1}=2.2^{n}$

   Et d'après l'hypothèse de récurrence on a : $2^{n}\geq n^{2}$

Donc $2^{n+1} \geq 2.n^2$

Puisque $n^2 \geq 2n+1$ pour $n \geq 4$ alors $2^{n+1} \geq n^2 + 2n + 1$ c-à-d $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

✓ On déduit que : $(\forall n \geq 4) \quad 2^n \geq n^2$

10.Montrons que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

✓ Pour $n = 0$: $(1+x)^0 \geq 1+0.x$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que : $(1+x)^n \geq 1+nx$
- Et montrons que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

On a : $(1+x)^{n+1} = (1+x).(1+x)^n$

Et d'après l'hypothèse de récurrence on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$

Donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+x).(1+nx)$

Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$

Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$ et comme $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

Alors $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

✓ On déduit que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

つづく