~ Examens historiques ~
Baccalauréat sciences expérimentales
mai 1980

Problème 1 :

Soit P l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$

α étant un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$

1. a) Calculer $P(1)$

b) En déduire trois nombres réels a,b,c tels que : $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

On obtient trois solutions qu'on notera $z_1;z_2;z_3$ tel que $z_1=1$.

2. a) Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions $z_1;z_2;z_3$

b) Pour quelles valeurs de α les modules : $|z_2+1|$; $|z_1|$; $|z_3-1|$ pris dans cet ordre , forment une progression géométrique.

Problème 2 :

Première partie

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{2\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)$

1. Etudier la fonction f : ensemble de définition, limites, variations .
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'ensemble de définition de f :

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\left[\ln\left(2\sqrt{2}\right)-\ln(x)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

Préciser les branches infinies de (C)

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on calculera l'abscisse

d) Tracer (C). (On prendra $\ln 2\simeq 0,7$)

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0,1]$.

Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs.

Tracer dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative de g^{-1}. Calculer $g^{-1}(x)$

Deuxième partie

1. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$,

Montrer que : $\tan^2(\alpha)=\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

Vérifier que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$

2. a) Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout x réel : $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=a+\dfrac{b}{1+x^2}$

b) Calculer l'intégrale $I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}dx$

3. A l'aide des résultats précédents et en utilisant une intégration par parties , calculer l'aire de la surface limitées par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équation :

$x=\sqrt{2}-1$ et $x=\sqrt{2}+1$

N.B. On rappelle que : $Arc\tan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Corrigé : Problème 1

$$P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1;\alpha\in[0,\pi]$$

1. a) $P(1)=0$

   b) $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$

   par identification on trouve : $a=1, b=2\sin(\alpha), c=1$

   c)

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\Leftrightarrow (z-1)\left(z^2+(2\sin(\alpha))z+1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow z-1=0 \quad ou \quad z^2+(2\sin(\alpha))z+1=0 \\ &\Leftrightarrow z=1 \quad ;\Delta'=(i\cos\alpha)^2 \quad d'ou': \quad z'=-\sin\alpha+i\cos\alpha \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z''=-\sin\alpha-i\cos\alpha \end{aligned}$$

   D’où $S=\{1,-\sin\alpha+i\cos\alpha,-\sin\alpha-i\cos\alpha\}$

2. a) $z_1=1=1.e^{i(0)}$

$$z_2=-\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1.e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$z_3=-\sin\alpha-i\cos\alpha=\bar{z}_2=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

   b) $\left(|z_2+1|,|z_1|,|z_3-1|\right)$ forment une suite géométrique si et seulement si

$$\begin{aligned} |z_1|^2=|z_2+1|.|z_3-1| &\Leftrightarrow 1=|z_2z_3-z_2+z_3-1| \\ &\Leftrightarrow 1=|1-z_2+\bar{z}_2-1| \\ &\Leftrightarrow 1=|-2i\cos\alpha| \\ &\Leftrightarrow 1=2|\cos\alpha| \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2} \quad ou \quad \cos\alpha=\frac{-1}{2} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\alpha=\frac{\pi}{3} \quad ou \quad \alpha=\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Corrigé : Problème 2

Première partie

$$f(x) = \ln\left(\frac{2\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)$$

1. Ensemble de définition de f : $D_f =]0,+\infty[$

   Limites aux bornes de D_f : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}$; tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$ln(\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$

2. a) Intersection de (C) avec l'axe des abscisses

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2\sqrt{2}x}{1+x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}x}{1+x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

$\Delta' = 1$; d'où $x' = \sqrt{2} - 1$ et $x'' = \sqrt{2} + 1$

Donc $(C) \cap (Ox) = \{A, B\}$ avec $A\left(\sqrt{2}-1, 0\right)$ et $B\left(\sqrt{2}+1, 0\right)$

b)

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{x\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left[\ln\left(2\sqrt{2}\right) - \ln\left(x\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\ln\left(2\sqrt{2}\right) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right]$$

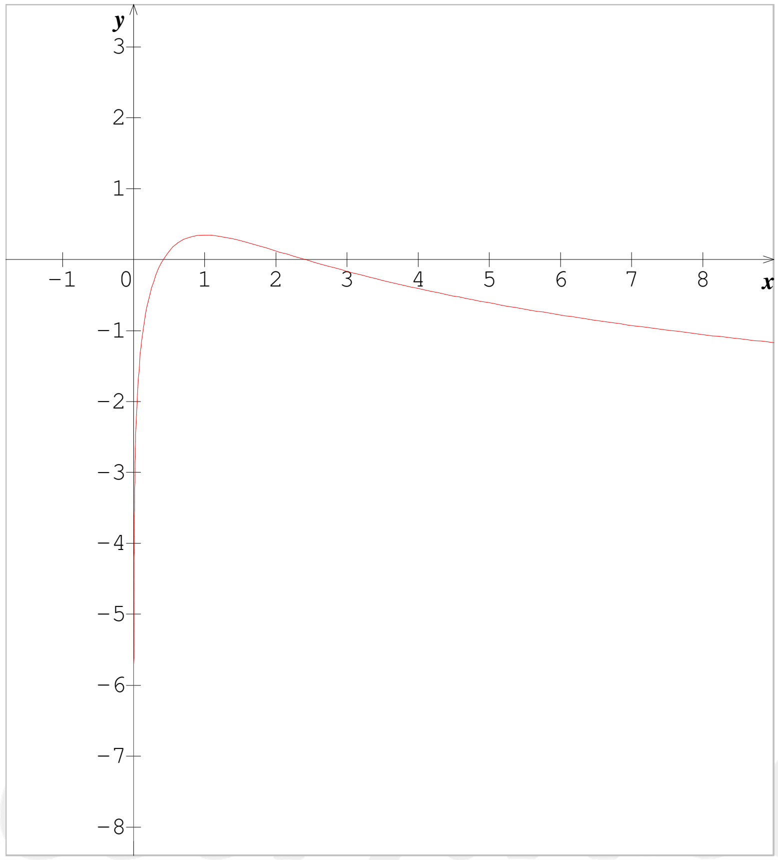
Branches infinies de (C)

- La droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\left(2\sqrt{2}\right) - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] = 0$

  Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox)

c) $f''(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$; $I\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}, f\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)\right)$ est un point d'inflexion

d) Représentation graphique de f :



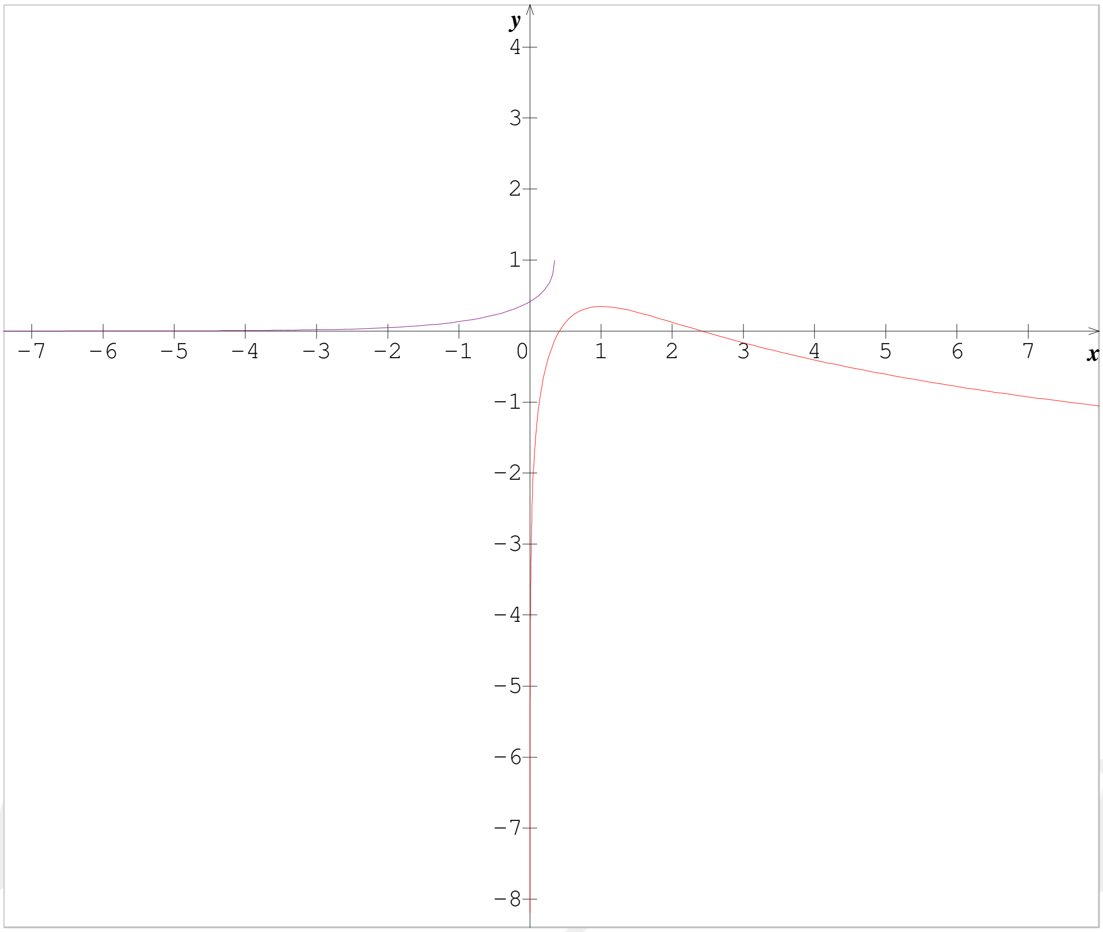
3. g est définie , continue et strictement croissante sur sur $]0,1]$ et

$g\left(]0,1]\right)=\left]-\infty,\ln\left(\sqrt{2}\right)\right]$

Donc g est une bijection de $]0,1]$ sur $\left]-\infty,\ln\left(\sqrt{2}\right)\right]$

g admet une bijection réciproque g^{-1} de $\left]-\infty,\ln\left(\sqrt{2}\right)\right]$ sur $]0,1]$

Représentation graphique de g^{-1} :



On a :

$$y=\ln\left(\frac{2\sqrt{2}x}{1+x^2}\right) \iff e^y=\frac{2\sqrt{2}x}{1+x^2}$$

$$\iff e^y x^2-2\sqrt{2}x+e^y=0$$

$\Delta'=2-e^{2y}$ d'où : $x'=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2-e^{2x}}}{e^x}>1$ à rejeter

$$x''=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-e^{2x}}}{e^x}>1$$

D'où $\boxed{g^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-e^{2x}}}{e^x}}$

Deuxième partie

1. $\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=\dfrac{2\sin^2(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)}=\tan^2(\alpha)$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$; $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+1$

2. a) On trouve $a=-1$ et $b=2$

b)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{1-x^2}{1+x^2}dx \\
&= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)dx \\
&= \left[-x+2\operatorname{Arc}\tan x\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \\
&= -2+2\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{2}+1\right)-2\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{2}-1\right) \\
&= -2+\left(2\times\frac{3\pi}{8}\right)-\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I=-2+\frac{\pi}{2}}$$

つづく