# ~ Examens historiques ~
# Baccalauréat sciences expérimentales
# Septembre 1978

**Problème 1 :**

Première partie :

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ ,par :

$f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}} f(x)$

   (On pourra faire le changement de variable $u=\sin x$ ).

2. Etudier les variations de $f$ dans $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$.

3. $(C)$ désigne la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

   a) Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de $(C)$

   b) Donner les équations des tangentes à $(C)$ en ses points d'abscisses $0$ et $\frac{\pi}{2}$.

   c) Montrer que le point $\Omega$ de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(C)$

   d) Tracer la courbe $(C)$.

4. Calculer l'aire arithmétique du domaine limité par $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations

   $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

Deuxième partie :

Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ ,par :

$g(x)=\ln(1+\sin(x))$

1. Etudier les variations de $g$ dans $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$.

2. $(\Gamma)$ désigne la courbe représentative de $g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Donner l'équation de la tangente à $(\Gamma)$ en son point d'abscisse $0$.

b) Montrer que la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\Gamma)$.

c) Tracer la courbe $(\Gamma)$. ( prendre $\ln 2\approx 0,7$)

3. Utiliser la courbe $(\Gamma)$ pour discuter suivant les valeurs du paramètre réel $m$ le nombre de solutions de l'équation : $x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\quad 1+\sin x-e^{m}=0$

4. Soit $k$ la restriction de la fonction réciproque $g$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $k$ admet une fonction réciproque $k^{-1}$ dont on donnera le tableau de variation

b) Tracer la courbe représentative $(\Gamma')$ de $k^{-1}$ dans le même repère que $(\Gamma)$.

c) Calculer $k^{-1}(x)$



**Problème2 :**

Exercice 1 :

Soit $P$ la fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $P(z)=z^{3}-i.z^{2}+c.z+d$

$c$ et $d$ sont des nombres complexes.

1. Sachant que $P(i)=0$, trouver une relation entre $c$ et $d$ et montrer que :

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad P(z)=(z-i)(z^{2}+c)$$

2. On donne de plus $P(1)=8+16i$ , calculer $c$ et résoudre l'équation : $z\in\mathbb{C},\quad P(z)=0$

Exercice 2 :

Deux sacs $A$ et $B$ contiennent chacun neuf jetons portant les numéros : $0,1,2,3,4,5,6,7,8$.
On tire un jeton dans chacun des sacs $A$ et $B$ . $a$ et $b$ sont les numéros portés respectivement par les jetons tirés dans $A$ et $B$ .
On suppose que dans chacun des deux sacs, les neuf jetons ont la même probabilité d'être tirés.
$S$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation : $x\in\mathbb{R},\quad ax=b$
Pour un tirage, on demande de calculer :

1. la probabilité $p_1$ pour que $S=\{2\}$.
2. la probabilité $p_2$ pour que $S=\mathbb{R}$.
3. la probabilité $p_3$ pour que $S=\varnothing$.
4. la probabilité $p_4$ pour que $S\subset\mathbb{N}$.

## Correction : Problème 1

$1^{ère}$ partie :

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}}\frac{\cos x}{1+\sin x}$

Posons $u=\sin x$ ;

$$\begin{aligned} u=\sin x &\Leftrightarrow \cos^2 x=1-u^2\\ &\Leftrightarrow |\cos x|=\sqrt{1-u^2}\\ &\Leftrightarrow \cos x=\sqrt{1-u^2}\\ &\left(car\quad x\to-\frac{\pi}{2}^+\right)\end{aligned}$$

Lorsque $x\to-\frac{\pi}{2}^+$ alors $u\to-1^+$

$$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{u\to-1\\ u>-1}}\frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u}=\lim\limits_{\substack{u\to-1\\ u>-1}}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}=+\infty$$

De même $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\lim\limits_{\substack{u\to-1\\ u>-1}}-\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}}=-\infty$

2. $f'(x)=-\frac{1}{1+\sin x}$ ;

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow -\infty$ |

3.a) $f''(x)=\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ ; $I\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un point d'inflexion

b). L'équation de la tangente à $(C)$ au point d'abscisse $0$ :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x+1$$

L'équation de la tangente à $(C)$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ :

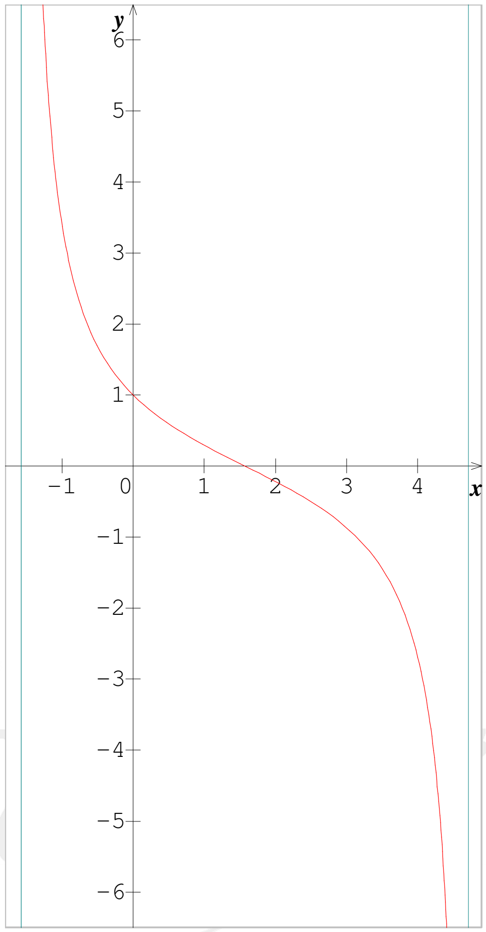
$$y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}$$

c)

- ✓ $\forall x\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[ : 2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-x=\pi-x\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$
- ✓ $\forall x\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[ : f\left(2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-x\right)=f(\pi-x)=\dfrac{\cos(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}=\dfrac{-\cos x}{1+\sin x}=2(0)-f(x)$

Donc le point $\Omega$ de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(C)$.

d) Représentation graphique :




4. $\mathcal{A}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\left[\ln(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$

2$^{ème}$ partie :

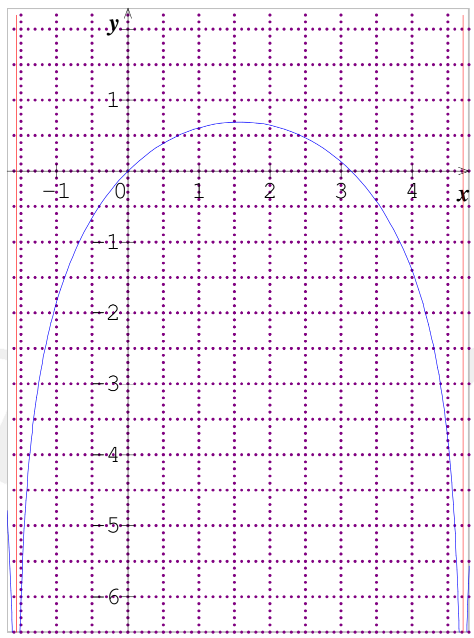
$$g(x)=\ln\left(1+\sin(x)\right)$$

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}} g(x)=+\infty$ , $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}} g(x)=-\infty$

   $g'(x)=f(x)$ ; tableau de variation de $g$ :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $ln(2)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2. Représentation graphique :




3.

$$1+\sin x - e^{m} = 0 \iff 1+\sin x = e^{m}$$
$$\iff \ln(1+\sin x) = m$$
$$\iff g(x) = m$$

- ✓ Si $m > \ln 2$ ; l'équation n'admet pas de solutions
- ✓ Si $m = \ln 2$ ; l'équation admet $1$ seule solution $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$
- ✓ Si $m < \ln 2$ ; l'équation admet $2$ solutions.

4. $k$ est définie, continue est strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et

$k\left(\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-\infty,\ln 2\right[$

$k^{-1}$ est une bijection de $\left]-\infty,\ln 2\right[$ sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Elle est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,\ln 2\right[$

$$k^{-1}(x)=\operatorname{Arc}\sin\left(e^x-1\right)$$

## Correction : Problème 2

Exercice 1 : $P(z)=z^3-i.z^2+c.z+d$

1.

$$P(i)=0\Leftrightarrow d=-ci$$

$$P(i)=0\Leftrightarrow P(z)=(z-i)\left(z^2+c\right)$$

2.

$$P(1)=8+16i\Leftrightarrow(1-i)c=7+17i\Leftrightarrow c=\frac{7+17i}{1-i}=-5+12i$$

$$P(z)=0\Leftrightarrow(z-i)\left(z^2-5+12i\right)=0\Leftrightarrow z=i\ ou\quad z^2=5-12i$$

$$z^2=5-12i\Leftrightarrow z=3-2i\ ou\quad z=-3+2i$$

$$S=\{i,3-2i,-3+2i\}$$

Exercice 2 :

1. $p_1=\frac{4}{81}$
2. $p_2=\frac{1}{81}$
3. $p_3=\frac{8}{81}$
4. $p_4=\frac{36}{81}$