~ *Examens historiques* ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Juin 1978

Problème 1 :

Les suites géométriques complexes se définissent de la même façon que les suites géométriques réelles.
Soit la suite géométrique complexe (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)u_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Calculer le module et l'argument de la raison $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ de la suite (u_n).

Ecrire les nombres complexes u_1, u_2, u_3 et u_4 sous forme algébrique et trigonométrique .

2. Calculer u_n en fonction de n . Préciser le module et l'argument de u_n .
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , u_n est un réel ?
4. Calculer , si elle existe , la limite du module $|u_n|$ de u_n lorsque n tend vers l'infini .
5. Calculer le plus petit entier naturel n_0 tel que , pour tout entier naturel n supérieur à n_0 , on ait : $|u_n| < 10^{-3}$. (on prendra $0,30103$ pour valeur approchée de $\log 2$, log désignant le logarithme décimal .)

Problème 2 :

<u>Première partie :</u>

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \sqrt{x} - 1$

1. Déterminer D_f ,ensemble de définition de f .

Etudier les variations de la fonction f .

2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité : $1cm$).
Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$; en déduire que (C) admet une demi- tangente en son point

d'abscisse 0 . Préciser les branches infinies de (C). Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses . Tracer (C).

3. Etudier graphiquement le signe de $\sqrt{x}-1$ suivant les valeurs de x .
4. Calculer en cm^2 l'aire arithmétique $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .

Deuxième partie :

Soit g la fonction numérique de la variable x définie par :

$$g(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$$

1. Déterminer D_g , ensemble de définition de g .

Calculer la limite de g lorsque x tend vers 1 et lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit g' la fonction dérivée de g sur $D_g-\{0\}$. Calculer $g'(x)$. Etudier les variations de g .
3. On désigne par (G) la courbe représentative de g dans un plan rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}$ (in pourra poser $t=-\sqrt{x}$ et utiliser $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$)

En déduire que (G) admet une demi tangente en son point d'abscisse 0.

Préciser cette demi- tangente .

   b) Etudier les branches infinies de (G).
   c) Montrer que (G) admet un point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées .

Calculer le coefficient directeur de la tangente à (G) en ce point I .

   d) Déterminer le point d'intersection de (G) avec l'axe des abscisses autre que l'origine et le coefficient directeur en ce point.
   e) Utiliser ce qui précède pour tracer (G). (on prendra $\ln 2\simeq 0,7$.)
4. Soit h la restriction de g à l'intervalle $[0,1[$. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs .

Tracer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative de h^{-1}.

Calculer $h^{-1}(x)$.

Correction : Problème 1

1.

- $\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

- $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

-
  - $u_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)u_0 = \frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
  - $u_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)u_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{-1}{8} + i\,\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$u_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

  - $u_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)u_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^3 = \frac{-1}{8}$

    $u_3 = \frac{1}{8}\left(\cos(\pi) + i\,\sin(\pi)\right)$
  - $u_4 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)u_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{-1}{8}\right) = \frac{-1}{32} - i\,\frac{\sqrt{3}}{32}$

$$u_4 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

2. Il est évident que (u_n) est une suite géometrique de raison $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

Donc pout tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

3.

$$\begin{aligned} u_n \in \mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{N} \\ & \Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc $u_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \in 3\mathbb{N}$

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car : $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

5. On a :

$$\begin{aligned} |u_n| < 10^{-3} \quad & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3} \\ & \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < \log\left(10^{-3}\right) \\ & \Leftrightarrow n\log\left(\frac{1}{2}\right) < -3 \\ & \Leftrightarrow -n\log(2) < -3 \\ & \Leftrightarrow n\log(2) > 3 \\ & \Leftrightarrow n > \frac{3}{\log(2)} \end{aligned}$$

Donc le plus petit entier naturel n_0 tel que , pour tout entier naturel n supérieur à n_0, on ait : $|u_n| < 10^{-3}$ est : $\boxed{n_0 = 10}$

Correction problème 2 :

Première partie : $f(x)=\sqrt{x}-1$

1.

- Ensemble de définition de f : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=[0,+\infty[$
- On a : $f(0)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- Tableau de variation de f :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

2.

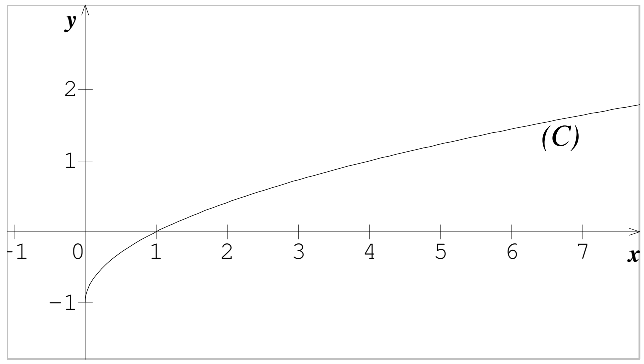
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt{x}-1-(-1)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
- (C) admet une demi- tangente verticale en son point d'abscisse 0
- Branche infinie :
  - ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=0$

  (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- Intersection de (C) et de (Ox) :

  $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$

  Donc $(C)\cap(Ox)=\{A\}$ avec $A(1,0)$

- Représentation graphique :



3. $\forall x \in [0,1[: f(x) < 0$

   $f(1) = 0$

   $\forall x \in]1,+\infty[: f(x) > 0$

4. $\mathcal{A} = \int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)dx = \left[x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Deuxième partie : $g(x) = \ln\left|\sqrt{x}-1\right|$

1.

- Ensemble de définition de g :

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 et \left|\sqrt{x}-1\right| > 0\right\} = [0,1[\cup]1,+\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln\left|\sqrt{x}-1\right| = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left|\sqrt{x}-1\right| = +\infty$

  $g(0) = 0$

2. g est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

   Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

   On a : $g'(x) = \left(\ln\left|f(x)\right|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$

   Donc : $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right) \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$

Tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3.

a)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-1}{\sqrt{x}}\times\frac{\ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{-\sqrt{x}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}\times\frac{\ln(1+t)}{t}=-\infty \quad \begin{pmatrix} t=-\sqrt{x}\\ x\to 0^+\\ t\to 0^- \end{pmatrix}$$

Donc (G) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0

b) <u>Branches infinies :</u>

- $\lim_{x\to 1} g(x)=-\infty \Rightarrow$ la droite d'équation $x=1$ est asymptote à (G)
- $\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)=0$$

Donc (G) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

c) g' est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

Soit $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

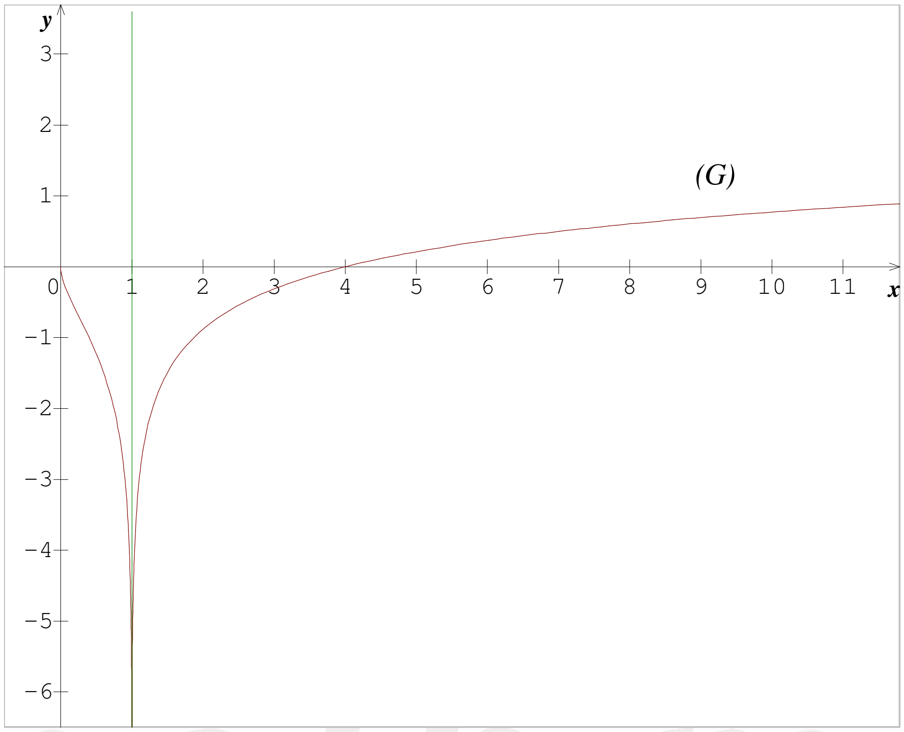
On a : $g''(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)'=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

g'' s'annule et change son signe en $\frac{1}{4}$, donc le point $I\left(\frac{1}{4},-\ln 2\right)$ est un point d'inflexion .

d) $g(x)=0\Leftrightarrow\left|\sqrt{x}-1\right|=1\Leftrightarrow x=0, ou, x=4$

donc $(G)\cap(Ox)=\{O,B\}$ avec $O(0,0)$ et $B(4,0)$

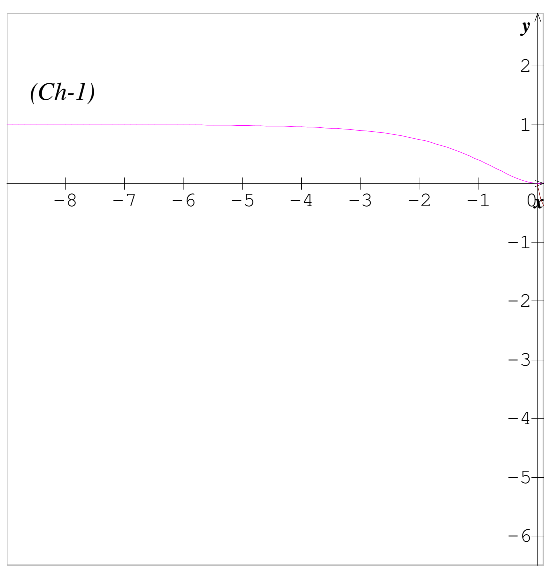
e) <u>Représentation graphique :</u>



4. h est définie , continue et strictement décroissante sur $[0,1[$ et $h([0,1[) =]-\infty,0]$

Donc h est une bijection de $[0,1[$ sur $]-\infty,0]$

h^{-1} est une bijection de $]-\infty,0]$ sur $[0,1[$



$$\begin{pmatrix} y = h^{-1}(x) \\ x \in \left]-\infty, 0\right] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = h(y) \\ y \in \left[0,1\right[\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(1-\sqrt{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{x} = 1-\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1-e^{x}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(1-e^{x}\right)^{2}$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\infty, 0\right]\right) \quad h^{-1}(x) = \left(1-e^{x}\right)^{2}$

つづく