~ Examens historiques ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Septembre 1977

Problème 1 :

Dans tout le problème qui suit, on pourra utiliser le résultat suivant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{t \to -\infty} t^n e^t = 0$

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x) = \left(3 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Déterminer D_f , ensemble de définition de f et calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ .la fonction f est-elle continue à la droite de 0 ?

   Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$ (on pourra poser $\dfrac{1}{x} = t$). La fonction f est-elle continue à gauche de 0 ? La fonction f est-elle continue en 0 ?
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et étudier les variations de f dans D_f .
4. Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   On prendra pour unité sur les axes des coordonnées $4cm$.

   a) Placer les points de (C) d'abscisses respectives $-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 2$.

   On utilisera le tableau des valeurs approchées :

x	-1	-2	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
e^x	0,37	0,14	3,80	1,68

   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (on pourra poser $\dfrac{1}{x} = t$).

   En déduire la demi-tangente à (C) à l'origine.

   c) Tracer (C).

5. a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par : $F(x)=(ax+b)e^{\frac{1}{x}}$ soit une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer l'aire arithmétique $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations : $y=3, x=1$ *et* $x=\lambda(\lambda>1)$

C) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$. (On pourra poser $\lambda=\frac{1}{u}$ et utiliser $\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1$).

Problème 2 :

I.

1. Etablir : $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos(\theta)+\sin(\theta)$.

2. Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ, $\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.
   On désigne par U le nombre complexe $U=z+i.\bar{z}$.
   Déterminer en fonction de θ le module et un argument de U.
3. M désignant l'image de z et P l'image de U dans le plan complexe, préciser les sous-ensembles de ce plan décrits par M et par P lorsque θ décrit $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

II. Les six faces d'un dé cubique sont numérotés $1,2,3,4,5,6$.

Les probabilités p_i $(i\in\{1,2,3,4,5,6\})$ d'obtenir $1,2,3,4,5,6$ sont proportionnelles aux termes consécutifs d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

1. Etablir que $p_1=\frac{1}{63}$ et en déduire les probabilités p_2,p_3,p_4,p_5,p_6.
2. On lance une première fois ce dé ; soit a le nombre obtenu.
   On lance une deuxième fois ce dé, soit b le numéro obtenu.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque couple (a,b) fait correspondre la somme $a+b$
   Quelles sont les valeurs prises par X ?
   Calculer la probabilité pour que $X<6$.

Correction : Problème 1

$$\begin{cases} f(x)=\left(3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} & ;x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$$

1. Ensemble de définition de f : $D_f=\mathbb{R}$

   Limites aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(3x-3+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

   Donc f n'est pas continue à droite de 0.

   $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

   Posons $\dfrac{1}{x}=t$

   Lorsque $x\to0^-$ alors $t\to-\infty$

   D'où $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(3-3t+t^2\right)e^t=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(3e^t-3te^t+t^2e^t\right)=0=f(0)$

   (Car $\forall n\in\mathbb{N}\quad \lim\limits_{t\to-\infty} t^n e^t=0$)

   Donc f est continue à gauche de 0.

3. $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^4}$; tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	3

4. b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}$

   Posons $\dfrac{1}{x}=t$

   Lorsque $x\to0^-$ alors $t\to-\infty$

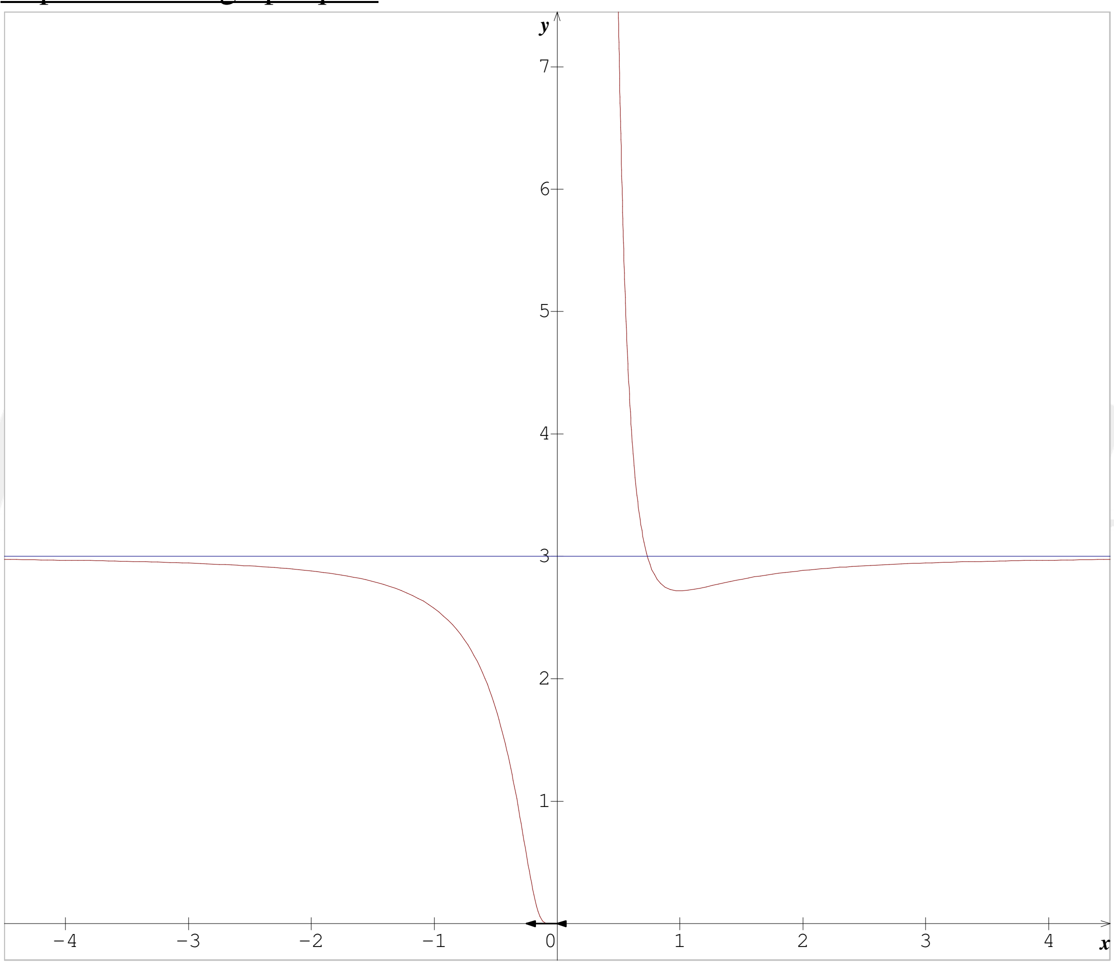
D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(3t-3t^2+t^3\right)e^t = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(3te^t-3t^2e^t+t^3e^t\right)=0$

Donc f est dérivable à gauche de 0 et (C) admet une demi tangente horizontale au point O.

Branches infinies :

- ✓ La droite d'équation $y=3$ est asymptote à (C)
- ✓ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C)

c) Représentation graphique :



5. a) $F(x)=(ax+b)e^{\frac{1}{x}}$

$$F'(x)=f(x) \iff \left(a-\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$F'(x)=f(x) \iff a=3 \quad et \quad b=-1$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \int_1^{\lambda}\left(3-f(x)\right)dx && \times\ unité\quad d'aire\\ &= \left[3x - F(x)\right]_1^{\lambda} && \times\ 16cm^2\\ &= \left[3x-(3x-1)e^{\frac{1}{x}}\right]_1^{\lambda} && \times\ 16cm^2\\ &= 16\left(3\lambda-(3\lambda-1)e^{\frac{1}{\lambda}}-3+2e\right)cm^2\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}16\left[3\lambda-(3\lambda-1)e^{\frac{1}{\lambda}}-3+2e\right]cm^2$$

Posons $\lambda = \frac{1}{t}$; lorsque $\lambda \to +\infty$ alors $t \to 0^+$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) &= \lim_{t\to0^+}16\left[\frac{3}{t}-\left(\frac{3}{t}-1\right)e^t-3+2e\right]cm^2\\ &= \lim_{t\to0^+}16\left[\frac{3}{t}-\frac{3}{t}e^t+e^t-3+2e\right]cm^2\\ &= \lim_{t\to0^+}16\left[-3\frac{\left(e^t-1\right)}{t}+e^t-3+2e\right]cm^2\\ &= 16\left[-3+1-3+2e\right]cm^2\\ &= 16\left(2e-5\right)cm^2\end{aligned}$$

<u>Correction : Problème 2</u>

I. 1. $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\cos(\theta)+\sin(\theta)$

2. Soit $z = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$,

$i.\bar{z}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\quad;\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$

$$U = z + i.\bar{z} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

$$U = \left(\cos(\theta) + \sin(\theta)\right)(1 + i)$$

$$U = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)(1+i) \quad or \quad \left(\forall \theta \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right) \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

D'où : $U = -\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \times \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\forall \theta \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]; U = -2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

et si $\theta = \frac{3\pi}{4}$ alors $U = 0$

II. 1. $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{4} = \frac{p_4}{8} = \frac{p_5}{16} = \frac{p_6}{32} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6}{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32} = \frac{1}{63}$

D'où $p_1 = \frac{1}{63}; p_2 = \frac{2}{63}; p_3 = \frac{4}{63}; p_4 = \frac{8}{63}; p_5 = \frac{16}{63}; p_6 = \frac{32}{63}$

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$$p[X < 6] = p\left([X = 2] \cup [X = 3] \cup [X = 4] \cup [X = 5]\right) = p[X = 2] + p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] = \boxed{\frac{1}{81}}$$

つづく