الأعداد العُقدية

1. تقديم و تعاريف :

- ❖ توجد مجموعة يرمز لها ب $\mathbb{C}$ و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
و هي تحتوي على عدد نرمز له ب i حيث $i^2 = -1$
- ❖ كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل $z = a + ib$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ العدد a يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له ب $\Re e(z)$
- ❖ العدد b يسمى الجزء التخيلي و نرمز له ب $\text{Im}(z)$
- ❖ الكتابة $z = a + ib$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z
- ❖ إذا كان $z = ib$ حيث $b \in \mathbb{R}$ نقول أن z تخيلي صرف و نكتب $z \in i\mathbb{R}$

2. خاصيات :

ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ لدينا :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases}$

العمليات في $\mathbb{C}$

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$

- $z+z'=(a+a')+i(b+b')$
- $z\times z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
- $-z=-a-ib$
- $\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$
- جميع خصائص الجداء و الجمع في $\mathbb{R}$ تبقى صالحة في $\mathbb{C}$
- $(a+ib)^2=a^2-b^2+2abi$
- $(a-ib)^2=a^2-b^2-2abi$
- $(a-ib)(a+ib)=a^2+b^2$

3. مرافق عدد عقدي

تعريف :

مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ هو العدد العقدي $\overline{z}=a-ib$

خاصيات المرافق

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين

- ✓ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- ✓ $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- ✓ $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}=\frac{1}{\overline{z_1}}$ $(z_1\neq 0)$
- ✓ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- ✓ $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ و $z\in\mathbb{C}$

نتائج :

- $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي $z=a+ib$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب : $|z|$ و هو معرف بما يلي :

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

خاصيات :

ليكن z و z' عددين عقديين

- ✓ $|z|=\sqrt{z.\bar{z}}$
- ✓ $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- ✓ $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ $(z\neq0)$
- ✓ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $(z'\neq0)$
- ✓ $|z^n|=|z|^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}$
- ✓ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z=x+iy$ من $\mathbb{C}^*$ حيث x و y من $\mathbb{R}$

كل عدد حقيقي θ بحيث : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{|z|}\end{cases}$ يسمى عمدة ل z و نكتب : $\arg(z)=\theta+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

أو $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ $(k\in\mathbb{Z})$

ب. خاصيات العمدة:

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

- ✓ $\arg\left(\overline{z_1}\right)\equiv -\arg\left(z_1\right)\left[2\pi\right]$
- ✓ $\arg\left(z_1\times z_2\right)\equiv \arg\left(z_1\right)+\arg\left(z_2\right)\left[2\pi\right]$
- ✓ $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right)\equiv -\arg\left(z_1\right)\left[2\pi\right]$
- ✓ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\equiv \arg\left(z_1\right)-\arg\left(z_2\right)\left[2\pi\right]$
- ✓ $\arg\left(z_1^{\,n}\right)\equiv n\arg\left(z_1\right)\left[2\pi\right]$ حيث $n\in\mathbb{Z}$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$
حيث $\left|z\right|=r$ و $\arg\left(z\right)\equiv\theta\left[2\pi\right]$

خاصيات الشكل المثلثي :

- $\overline{r\left(\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)\right)}=r\left(\cos\left(-\theta\right)+i\sin\left(-\theta\right)\right)$
- $r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\times r'\left(\cos\theta'+i\sin\theta'\right)=rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right)\right)$
- $\dfrac{1}{r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)}=\dfrac{1}{r}\left(\cos\left(-\theta\right)+i\sin\left(-\theta\right)\right)$
- $\dfrac{r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)}{r'\left(\cos\theta'+i\sin\theta'\right)}=\dfrac{r}{r'}\left(\cos\left(\theta-\theta'\right)+i\sin\left(\theta-\theta'\right)\right)$
- $\left(r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right)^n=r^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)\right)$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ (علاقة موافر)

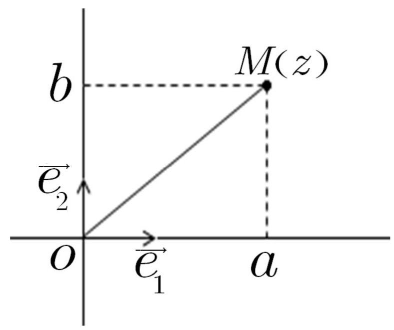
7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

تعاريف:

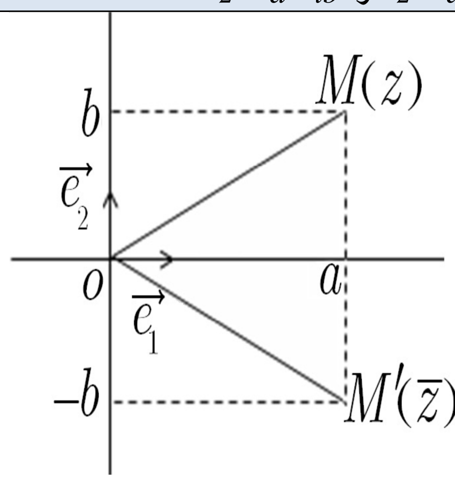
في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$

لتكن النقطة $M\,(a,b)$

- العدد العقدي $z=a+ib$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق النقطة M
- النقطة $M\,(a,b)$ تسمى صورة العدد $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

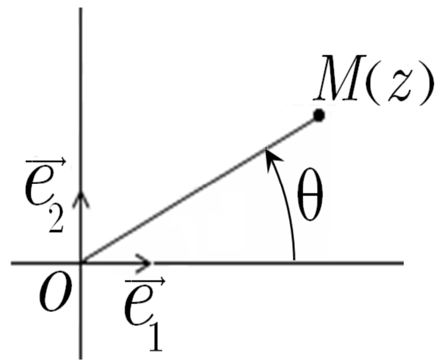


- مرافق $z=a+ib$ هو $\bar{z}=a-ib$

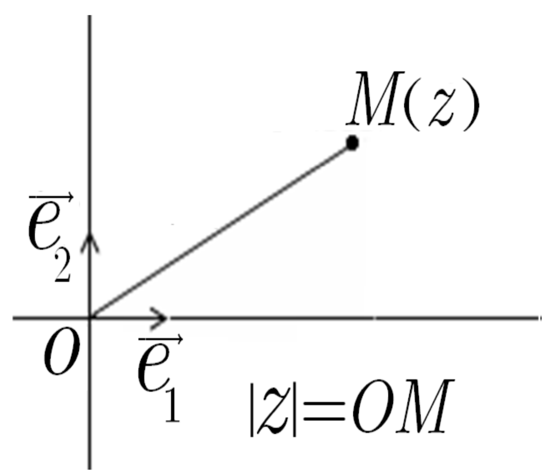


- لدينا كذلك $z=a+ib$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{U}\,(a,b)$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- $\left(O,\overrightarrow{e_1}\right)$ يسمى المحور الحقيقي
- $\left(O,\overrightarrow{e_2}\right)$ يسمى المحور التخيلي
- $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$ و نكتب $z_M=a+ib$ أو $aff\,(M)=a+ib$

❖ ليكن $z=a+ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا : $\arg(z)\equiv\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$



❖ المسافة OM : $OM=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$



المسافة AB :
لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B
لدينا : $AB=|z_B-z_A|$

خاصيات :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B
و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_B - z_A$
- لحق المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ هو : $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- M نقطة لدينا :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$$
$$\overrightarrow{OM} = \alpha.\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha.z_A$$

- لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة مثنى مثنى
  - A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
  - $(AB)//(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$
  - $(AB)\perp(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
  - النقط A و B و C و D متداورة $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

قياس الزوايا :

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$ حيث $O \neq A$
- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ حيث $A \neq B$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$

- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)\equiv \arg\left(\dfrac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\left[2\pi\right]$

حيث $A\neq B$ و $C\neq D$

8. الشكل الأسي لعدد عقدي :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسي ب: $z=re^{i\theta}$

حيث $|z|=r$ و $\arg(z)\equiv\theta\left[2\pi\right]$

خاصيات :

- ✓ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
- ✓ $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- ✓ $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- ✓ $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$
- ✓ $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

صيغ أولير

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

9. المعادلات في $\mathbb{C}$

أ. المعادلة $z^2 = a$ $\left(a \in \mathbb{R}^*\right)$

إذا كان : $a \in \mathbb{R}_*^-$ لدينا : $z^2 = a \Leftrightarrow z = i\sqrt{-a}$ أو $z = -i\sqrt{-a}$

إذا كان : $a \in \mathbb{R}_*^+$ لدينا : $z^2 = a \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ أو $z = -\sqrt{a}$

ب. المعادلة $az^2 + bz + c = 0$: حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ مع $a \neq 0$:

حل المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0$: **المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين :**
$$\begin{cases} z = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ z = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

- $\Delta = 0$: **المعادلة تقبل حلا حقيقيا :**
$$z = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$: **المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :**
$$\begin{cases} z = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ z = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

10. التحويلات الاعتيادية :

خاصية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

- **الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ هي :** $z'=z+z_{\vec{u}}$
- **الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k هي :** $z'-\omega=k(z-\omega)$
- **الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$** و زاويته θ هي : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$