~ Examens historiques ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Juin 1977

Problème 1 :

1. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$

Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C_1) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Donner l'équation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0 et la tracer .

2. En faisant une intégration par parties, calculer l'aire arithmétique $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C_1) , les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ $(\lambda\in\,]-1,0])$

Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-1^+}\mathcal{A}(\lambda)$

3. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (C_2) dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Préciser les points O , A communs à (C_1) et (C_2).

Déterminer, suivant les valeurs de x , la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

4. Calculer : $\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$ en faisant le changement de variable : $u=\sqrt{1+x}$

Déduire de ce qui précède l'aire arithmétique S du domaine limité par la courbe (C_1), la courbe (C_2), l'axe des ordonnées $y'oy$ et la parallèle à $y'oy$ passant par A .

Problème 2 :

I. Soit la suite numérique réelle (u_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\quad u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1. calculer $u_{n+1}-u_n$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante
2. On pose $v_n=u_1+u_2+.......+u_n$

Calculer v_n en fonction de n puis la limite de v_n lorsque n tend vers l'infini.

La suite (v_n) est-elle convergente ?

3. On pose $w_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots\ldots + u_{2n}$.
   Calculer w_n en fonction de n puis la limite de w_n lorsque n tend vers l'infini.
   La suite (w_n) est-elle convergente ?

II. Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de l'urne ;

- Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne
- Si la boule tirée est blanche, on ne la remet pas dans l'urne.

On effectue cette épreuve trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui à chaque ensemble des trois tirages successifs associe le nombre de boules blanches restant dans l'urne après les trois tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 1.
2. Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 2.
   Pour cela, on sera amené à calculer la probabilité pour obtenir les tirages successifs suivants :
   a) Une blanche, une blanche, une noire.
   b) Une blanche, une noire ,une blanche .
   c) Une noire, une blanche, une blanche.
3. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   En utilisant un procédé analogue à celui utilisé précédemment, déterminer la loi de probabilité de X .

Correction : Problème 1

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1.

- Ensemble de définition de f : $D_f = \left]-1,+\infty\right[$
- Limites aux bornes de D_f :

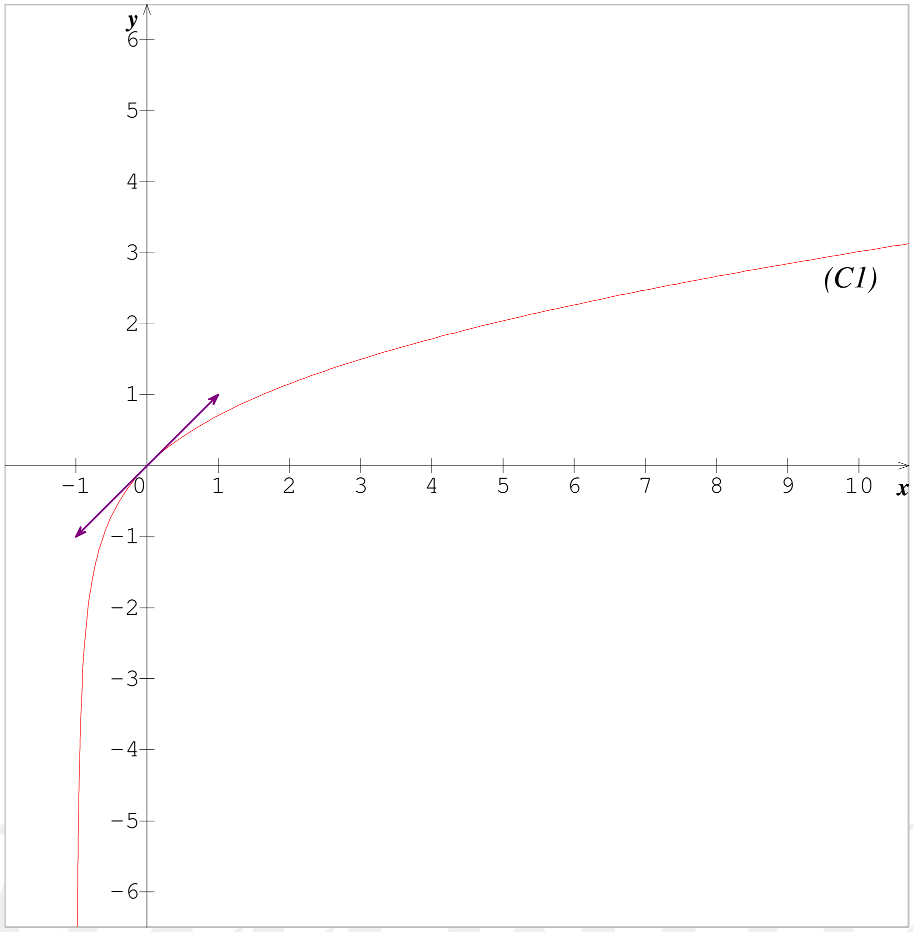
  $$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty$$

- $f'(x)=\dfrac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$

  Tableau de variation de f :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>Branches infinies :</u>
  - ✓ La droite d'équation $x=-1$ est asymptote à (C_1)
  - ✓ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; donc (C_1) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Equation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0 : $y = x$
- Représentation graphique de (C_1) :



2. $\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)dx=\int_0^{\lambda}\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

Faisons une intégration par parties .
Soit

$$u=x \Rightarrow u'=dx$$

$$v'=\frac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow v=2\sqrt{1+x}$$

d'ou

$$\mathcal{A}(\lambda)=\left[2x\sqrt{1+x}\right]_0^{\lambda}-2\int_0^{\lambda}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=\left[2x\sqrt{1+x}\right]_0^{\lambda}-2\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right]_0^{\lambda}$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=2\lambda\sqrt{1+\lambda}-\frac{4}{3}\sqrt{(1+\lambda)^3}+\frac{4}{3}$$

et $\lim_{\lambda \to -1^+} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{4}{3}$

3. $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

- Ensemble de définition de g : $D_g =]-1,+\infty[$.
- Limites aux bornes de D_g : $\lim_{x \to -1^+} g(x) = +\infty; \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- $g'(x) = \frac{x(4+3x)}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$

  Tableau de variation de g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Branches infinies :
  - ✓ La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C_2)
  - ✓ $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$; donc (C_2) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- <u>Intersection de (C_1) et (C_2)</u>

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 1 \end{aligned}$$

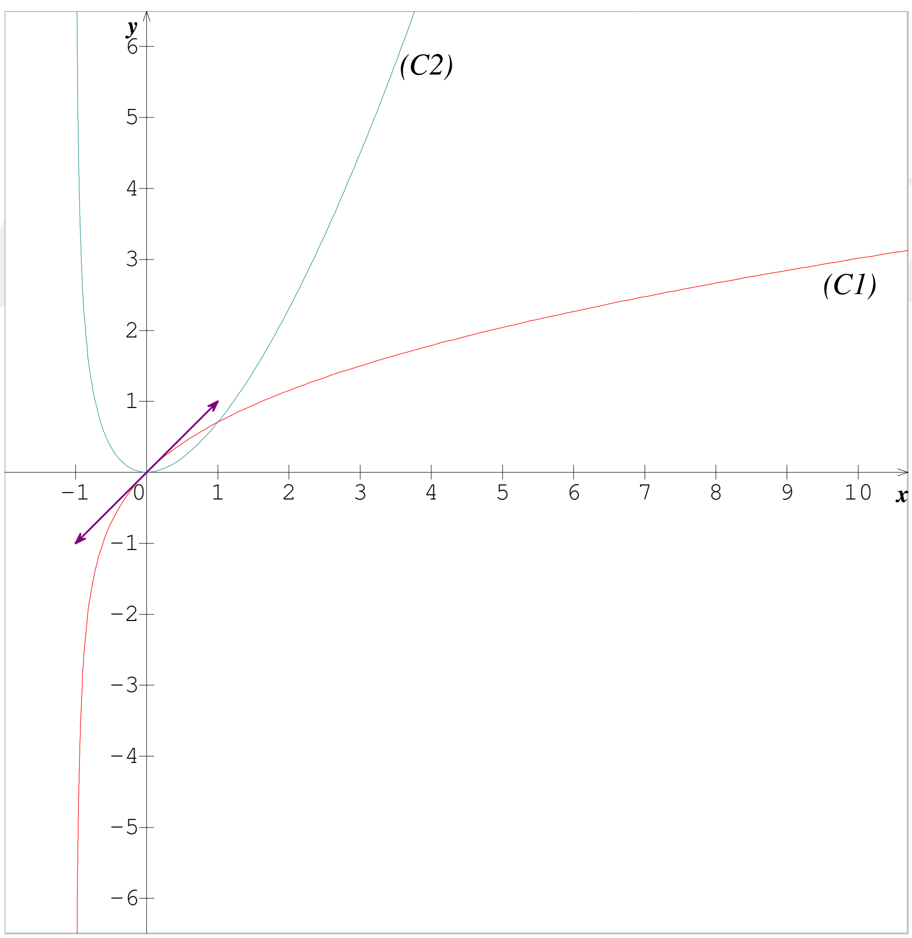
  donc $(C_1) \cap (C_2) = \{O, A\}$ avec $O(0,0)$ et $A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- <u>Position relative de (C_1) et (C_2)</u>

x	-1		0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- ✓ Si $x\in\left]-1,0\right[$ alors (C_1) est au dessous de (C_2)
- ✓ Si $x=0$ alors (C_1) coupe (C_2) en O
- ✓ Si $x\in\left]0,1\right[$ alors (C_1) est au dessus de (C_2)
- ✓ Si $x=1$ alors (C_1) coupe (C_2) en A
- ✓ Si $x\in\left]1,+\infty\right[$ alors (C_1) est au dessous de (C_2)

- <u>Représentation graphique (C_2) de g :</u>



4. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$:

Posons $u=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow u^2=1+x \Leftrightarrow x=u^2-1 \Leftrightarrow x^2=\left(u^2-1\right)^2$

$$du=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \Leftrightarrow 2du=\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

lorsque $x=0$ alors $u=1$ et lorsque $x=1$ alors $u=\sqrt{2}$

d'où

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx=\int_1^{\sqrt{2}} 2\left(u^2-1\right)^2 du=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(u^4-2u^2+1\right)du=2\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2}{3}u^3+u\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{14\sqrt{2}-16}{15}$$

et

$$S=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx=\lim_{\lambda\to 1}A(\lambda)-\frac{14\sqrt{2}-16}{15}=\frac{-2}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{3}-\frac{14\sqrt{2}-16}{15}=\boxed{\frac{12-8\sqrt{2}}{5}}$$

Correction : Problème 2

I. $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1. $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0 \quad$ (car $\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$)

donc $u_{n+1} < u_n$ et par suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante

2. $v_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\ldots\times\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$

d'ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et par suite $\left(v_n\right)$ est divergente

3.

$$w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\ldots\ldots\times\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

d'ou $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ln(2)$

II. 1. $p(X=1) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{35}$

2. $p(X=2) = \left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\right) = \frac{107}{245}$

3. $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$

Loi de probabilité de X :

k	1	2	3	4
$p(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{107}{245}$	$\frac{127}{343}$	$\frac{27}{343}$

つづく