~ Examen Vintage ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Septembre 1976

Problème 1 :

A.

1. Etudier la fonction h de la variable x définie par :

$$h: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

Tracer la courbe représentative (C) de h, dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$.

2. Etudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $\left(x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = m\right)$

B. Soit le nombre complexe $z_t = e^{2t} + 2it$

e est la base des logarithmes népériens.
t est un nombre réel.

1. Déterminer dans le plan complexe, rapporté au repère $\mathscr{R}$, l'ensemble (Γ) des images de z_t, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels.

2. Soit l'équation : $t \in \mathbb{R}: \quad e^{6t} - \left(1 + e + e^2\right)e^{4t} + \left(e + e^2 + e^3\right)e^{2t} - e^3 = 0$

Résoudre cette équation.
Soit $\{t_1, t_2, t_3\}$ l'ensemble des solutions, calculer $z_{t_1}, z_{t_2}, z_{t_3}$.

3. a) Calculer en fonction de t, $\tan\left(\arg(z_t)\right)$

b) α étant un nombre réel, strictement compris entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{+\pi}{2}$, discuter suivant les valeurs de α,
le nombre des solutions de l'équation :
$t \in \mathbb{R}: \quad \tan\left[\arg\left(e^{2t} + 2it\right)\right] = \tan(\alpha)$
(on pourra poser $e^{2t} = x$ et utiliser les résultats du paragraphe A.)

Problème 2 :

I. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = tg^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2tg\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Quelle est la période de f ?
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
3. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1} et exprimer $g^{-1}(x)$.
   Calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$, lorsqu'elle existe .
4. Soit $a \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $S(a)$ l'aire du domaine limité par les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}, x = a$, $y = 0$ et par la courbe (C). Calculer $S(a)$.

II. Une boite contient trois paires de chaussures différentes. Les six chaussures sont notées :

$$\underbrace{1d, 1g}_{paire\,1} \quad \underbrace{2d, 2g}_{paire\,2} \quad \underbrace{3d, 3g}_{paire\,3}$$

Soit E l'ensemble constitué par les six chaussures.
On tire de cette boite quatre chaussures au hasard. Ω est l'ensemble des parties de cardinal 4 de E .
Les événements réduits à une seule épreuve sont équiprobables.
1. Déterminer le cardinal de Ω.
2. Pour l'entier i , $1 \leq i \leq 3$, on note A_i l'événement suivant : parmi les quatre chaussures tirées se trouve la paire $n^2 i$
   Quel est le cardinal de A_i ? Déterminer la probabilité $p(A_i)$ de l'événement A_i .
3. Soit A l'événement suivant : parmi les quatre chaussures tirées , il se trouve au moins une paire .
   Déterminer la probabilité $p(A)$ de A .

Correction Problème 1 :

A. $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

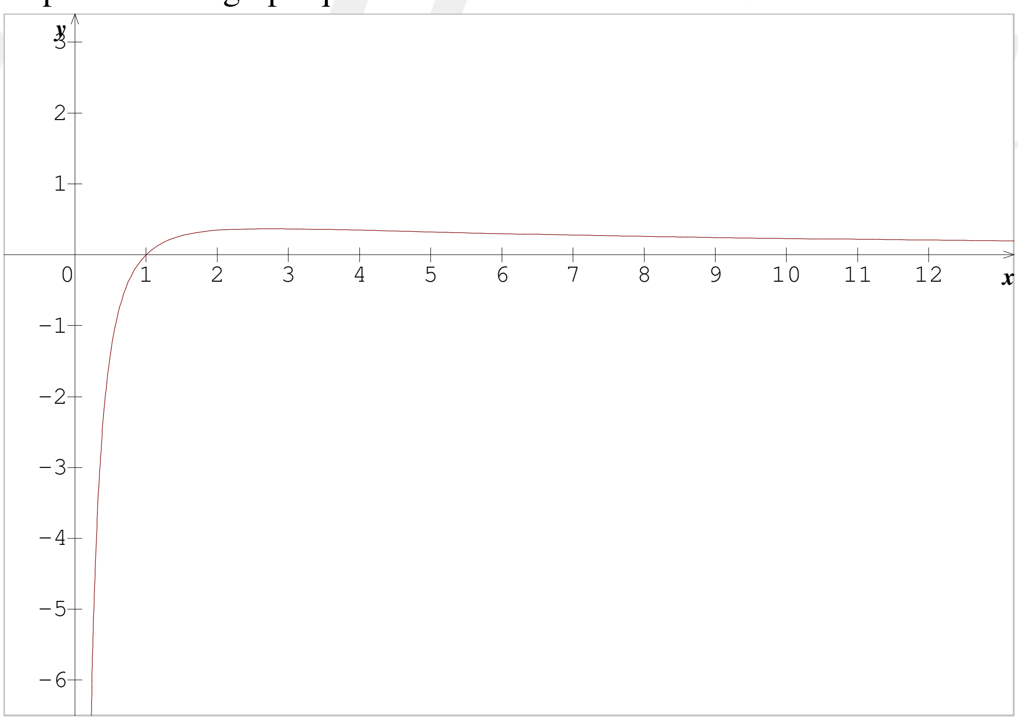
1.

- Ensemble de définition de h : $D_h=]0,+\infty[$
- Limites aux bornes de D_h : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$
- $h'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

  Tableau de variation de h :

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

- Représentation graphique de h :



2. $x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = m$

- ✓ Si $m > \frac{1}{e}$ alors pas de solutions
- ✓ Si $m = \frac{1}{e}$ alors il y a une solution : $S = \{e\}$
- ✓ Si $0 < m < \frac{1}{e}$ alors il y a 2 solutions
- ✓ Si $m \leq 0$ il y a une solution

B. $z_t = e^{2t} + 2it$

1. $M(z_t) ; M(x = e^{2t}, y = 2t)$

$$\begin{aligned} x = e^{2t} &\Leftrightarrow 2t = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow y = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow M \in (\Gamma) \end{aligned}$$

(Γ) : courbe représentative de la fonction $f(x) = \ln(x)$

2. $e^{6t} - (1 + e + e^2)e^{4t} + (e + e^2 + e^3)e^{2t} - e^3 = 0 \quad (1)$

Posons $\begin{cases} x = e^{2t} \\ x > 0 \end{cases}$

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - (1 + e + e^2)x^2 + (e + e^2 + e^3) = 0$

1 est solution évidente

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)\left(x^2 - (e + e^2)x + e^3\right) = 0$

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad ou \quad x^2 - (e + e^2)x + e^3 = 0$

$\Delta = (e^2 - e)^2$

$x' = e^2 \quad ; \quad x'' = e$

- ✓ Si $x = 1$ alors $e^{2t} = 1$ d'où $t = 0$
- ✓ Si $x = e^2$ alors $e^{2t} = e^2$ d'où $t = 1$
- ✓ Si $x = e$ alors $e^{2t} = e$ d'où $t = \frac{1}{2}$

Donc $S = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

3. a) $\tan\left(\arg\left(z_t\right)\right)=\dfrac{\dfrac{2t}{\left|z_t\right|}}{\dfrac{e^{2t}}{\left|z_t\right|}}=\boxed{\dfrac{2t}{e^{2t}}}$

b) $\tan\left(\arg\left(e^{2t}+2it\right)\right)=\tan(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2t}{e^{2t}}=\tan(\alpha) \quad (2)$

posons $\begin{cases} x=e^{2t} \\ x>0 \end{cases}$; $(2) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(x)}{x}=\tan(\alpha)$

- ✓ Si $Arctg\left(\dfrac{1}{e}\right)<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ alors (2) n'a pas de solution
- ✓ Si $\alpha=Arctg\left(\dfrac{1}{e}\right)$ alors (2) a une solution
- ✓ Si $0<\alpha<Arctg\left(\dfrac{1}{e}\right)$ alors (2) a 2 solutions
- ✓ Si $\dfrac{-\pi}{2}<\alpha\leq 0$ alors (2) a une solution.

Correction : Problème 2

I. $f(x) = tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 2tg\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3$

1. Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R} - \{x / x = (2k+1)\pi\}$

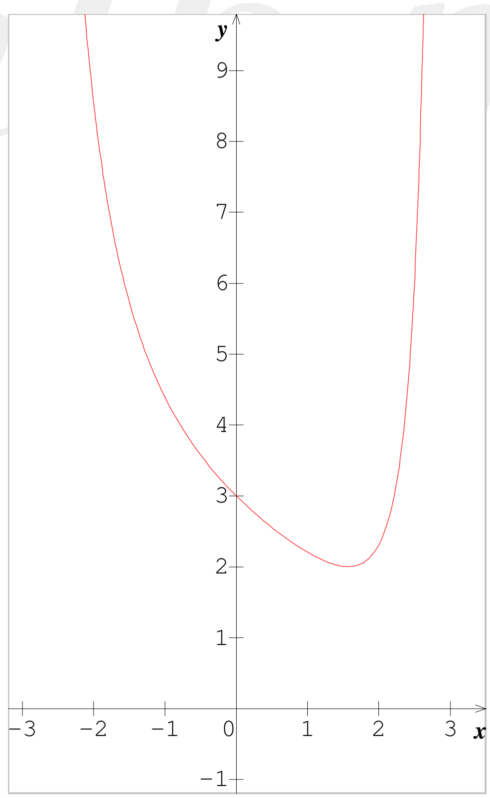
   f est périodique de période 2π. Domaine d'étude : $D_E =]-\pi, \pi[$

2. $f'(x) = \left(tg\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1\right)\left(1 + tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

   Tableau de variation de f :

x	$-\Pi$		$\frac{\Pi}{2}$		Π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   Représentation graphique de f :



3. g est définie , continue et strictement décroissante sur $\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$

et $g\left(\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]2,+\infty\right[$ donc g est une bijection de $\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]2,+\infty\right[$

g admet une bijection réciproque g^{-1} de $\left]2,+\infty\right[$ sur $\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$

g^{-1} est continue et strictement décroissante sur $\left]2,+\infty\right[$

Expression de $g^{-1}(x)$:

$$y=tg^2\left(\frac{x}{2}\right)-2tg\left(\frac{x}{2}\right)+3 \qquad \Leftrightarrow y=\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2+2$$

$$\Leftrightarrow y-2=\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-2}=\left|1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|=1-tg\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \left(car \quad x\in\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right)=1-\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=Arctg\left(1-\sqrt{y-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=2Arctg\left(1-\sqrt{y-2}\right)$$

D'où : $g^{-1}(x)=2Arctg\left(1-\sqrt{x-2}\right)$

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\sqrt{x-2}\left(x-2\sqrt{x-2}\right)}$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} tg\left(Arctg\left(1-\sqrt{x-2}\right)\right)=1-\sqrt{x-2} \\ et \quad tg^2\left(Arctg\left(1-\sqrt{x-2}\right)\right)=\left(1-\sqrt{x-2}\right)^2 \end{cases}$$

II. 1. $card\,\Omega=C_6^4=15$

2. $p\left(A_i\right)=\frac{C_4^2}{C_6^4}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

3. $p\left(A\right)=1$

つづく