~ Examen Vintage ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Juin 1976

Problème 1 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f ; étudier les limites de f aux bornes de D_f et montrer que f est continue sur D_f. Etudier la dérivabilité de f sur D_f.

   b) Calculer $f'(x)$

   c) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de f.

2. Montrer que f admet sur D_f une fonction réciproque f^{-1}. Exprimer $f^{-1}(x)$ et tracer la courbe représentative des variations de f^{-1}, dans le même repère

3. λ désigne un réel strictement négatif

   a) Calculer $I_\lambda=\int_{-\ln(2)}^{\lambda} f(x)dx$

   On utilisera la méthode du changement de variable en posant $u=e^x$

   b) Que représente I_λ ?

   c) Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda<0}} I_\lambda$ et $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_\lambda$

   N.B : on rappelle que $(Arc\sin)'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Problème 2 :

On dispose de deux urnes contenant chacune cinq jetons numérotés de 0 à 4. Dans la première les jetons sont rouges, dans la seconde sont bleus.
On tire au hasard un jeton dans la première urne. on lit le nombre porté sur le jeton, soit a, puis on remet le jeton tiré dans l'urne (tirage avec remise) ; on effectue la même opération pour la seconde urne .
On appelle b le numéro du jeton tiré.
A ce couple (a,b) on associe le nombre complexe $a+ib=z$

1. Quelle est la probabilité pour que z soit une racine cubique de $(-2+2i)$?
2. Quelle est la probabilité pour que z soit réel ; pour que z soit imaginaire pur ?
3. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque épreuve constituée du tirage d'un jeton rouge et d'un jeton bleu, associe le module de $z=a+ib$

a) Quelles sont les valeurs possibles de X ? . Donner les résultats par un tableau à double entrée.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

4. Soit M l'image de z dans le plan complexe.

a) Quelle est la probabilité pour que M soit situé sur la première bissectrice des axes ?

b) Quelle est la probabilité pour que M soit situé à l'intérieur du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 5$?

Correction : Problème1

1. $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

a) ensemble de définition de f : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\}=]-\infty,0[$

Limites aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$

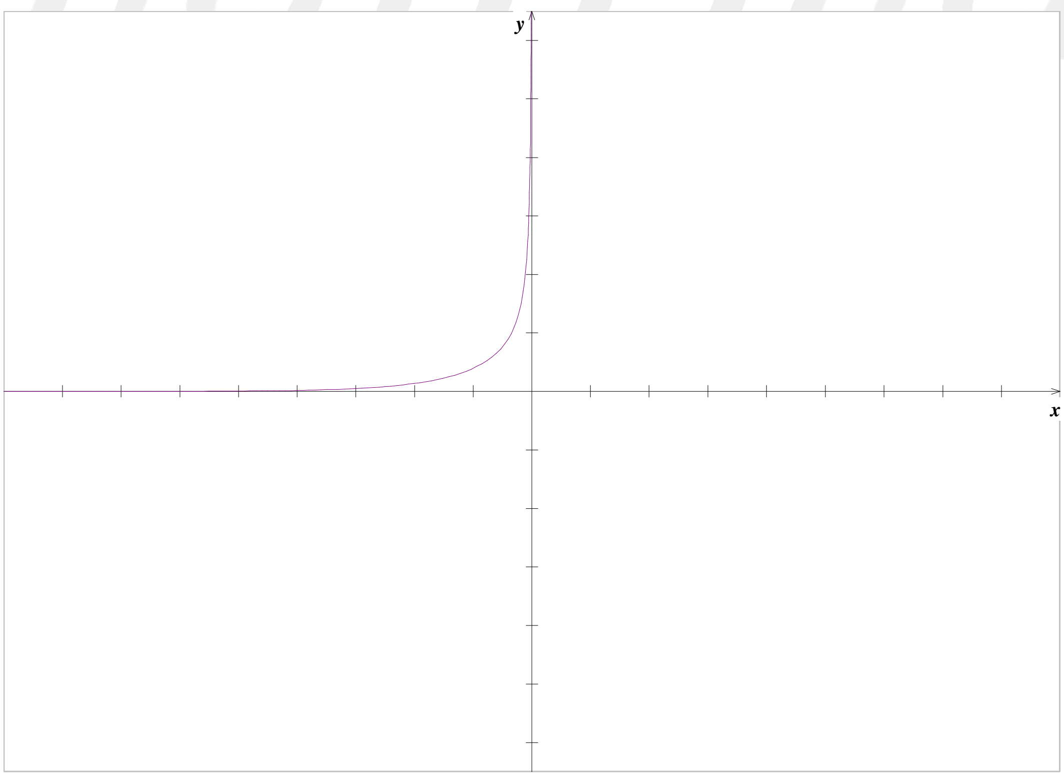
b) $f'(x)=\dfrac{e^x}{(1-e^{2x})\sqrt{1-e^{2x}}}$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Branches infinies : les droites d'équations $y=0$ et $x=0$ sont asymptotes à (C)

Représentation graphique de f :



2. f est définie, continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et $f\left(]-\infty,0[\right)=]0,+\infty[$.

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^{*-}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et par conséquence elle admet une bijection réciproque f^{-1}

de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}^{*-}$.

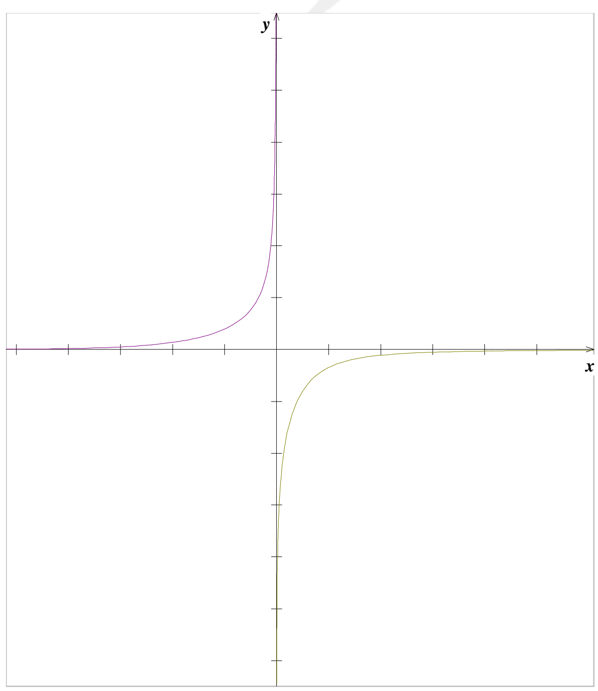
f^{-1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

<u>Expression de $f^{-1}(x)$:</u>

$$y=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} \Leftrightarrow y^{2}=\frac{e^{2x}}{1-e^{2x}}$$
$$\Leftrightarrow y^{2}-y^{2}e^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}\left(1+y^{2}\right)=y^{2}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{y^{2}}{1+y^{2}}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^{2}}{1+y^{2}}\right)$$

D'où : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)$

<u>Courbe représentative de f^{-1}</u>



3\. a) $I_\lambda = \int_{-\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \left[Arc\sin\left(e^x\right) \right]_{-\ln 2}^{\lambda} = Arc\sin\left(e^\lambda\right) - Arc\sin\left(\frac{1}{2}\right) = Arc\sin\left(e^\lambda\right) - \frac{\pi}{6}$

b) I_λ représente l'aire algébrique du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = \lambda$ $(\lambda < 0)$

c) $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} I_\lambda = \lim\limits_{\lambda \to 0^-} \left(Arc\sin\left(e^\lambda\right) - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_\lambda = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \left(Arc\sin\left(e^\lambda\right) - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\pi}{6}$

Correction Problème 2

1. On cherche z tel que $z^3 = -2+2i$. Soit $z = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$

$$z^3 = -2+2i \quad \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^3 = \sqrt{2^3} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2^3} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i \ , \quad z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

z racine cubique de $(-2+2i) \Leftrightarrow$

$$z \in \left\{1+i ; \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

Soit A : l'événement obtenir z telle que z soit racine cubique de $(-2+2i)$

$$p(A) = p\{(1,1)\} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{25}}$$

2. B : l'événement obtenir z telle que z soit réel.

$$p(B) = p\{(a,0)\} = \boxed{\frac{1}{5}} \quad \left(a \in \{0,1,2,3,4\}\right)$$

C : l'événement obtenir z telle que z soit imaginaire pur.

$$p(C) = p\{(0,b)\} = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{4}{25}} \quad \left(b \in \{1,2,3,4\}\right)$$

3. $X(\Omega) = \left\{0,1,2,3,4,5,\sqrt{2},2\sqrt{2},3\sqrt{2},4\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{5},\sqrt{10},\sqrt{13},\sqrt{17}\right\}$

$b \diagdown a$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{17}$

2	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$
3	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$3\sqrt{2}$	5
4	4	$\sqrt{17}$	$2\sqrt{5}$	5	$4\sqrt{2}$

Loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4	5	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$
$p(X=k)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

4. $M(z=a+ib);M(a,b)$

M est situé sur la 1ère bissectrice si et seulement si $a=b$

a) D : événement M situé sur la 1ère bissectrice

$$p(D)=\frac{5}{25}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

b) E : événement M situé à l'intérieur du cercle d'équation $x^2+y^2=5$

M est à l'intérieur du cercle si et seulement si $a^2+b^2<5 \Leftrightarrow |z|<\sqrt{5}$

$$p(E)=\boxed{\frac{6}{25}}$$

つづく