~ Examen Vintage ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Juin 1975

Problème 1 :

1. On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.

2. Soit la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue à droite de 0.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x)}{x}$. En déduire que g est dérivable à droite de 0.

c) Etudier les variations de g.

d) Soit (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Etudier les branches infinies de (C) et sa concavité.

Tracer les points de (C) d'abscisses $0, \frac{1}{e}, e, e^2$ et les tangentes à (C) en ces points.

(On prendra les valeurs approchées figurant dans le tableau ci-dessous).

Construire la courbe de (C)

3. Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $x\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) + e > 0$

Tableau des valeurs approchées :

nombre	$\frac{1}{e}$	$\frac{3}{e}$	e	e^2
Valeurs approchées	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{11}{4}$	$\frac{15}{2}$

Problème 2 :

Rappel : On rappelle que l'ensemble $U=\{1; j; j^2\}$ des racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$ est un groupe commutatif pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad 1+j+j^2=0$$

On définit dans l'ensemble $U^3=U\times U\times U$ une loi de composition externe dont U est le domaine d'opérateurs par : $(\forall u\in U)\quad (\forall(a,b,c)\in U^3):\quad u.(a,b,c)=(ua,ub,uc)$

Exemple : $j.(1,j,j^2)=(j,j^2,1)$

à chaque triplet (a,b,c), éléments de U^3, on associe l'équation :

$z\in\mathbb{C}: az^2+bz+c=0$ qui sera notée $E(a,b,c)$

1. Donner en extension l'ensemble U^3.
2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie dans U^3 par :
$(a,b,c)\mathcal{R}(a',b',c')\Leftrightarrow \exists u\in U:(a,b,c)=u.(a',b',c')$
Est une relation d'équivalence .
Donner en extension les classes d'équivalence .
3. Montrer que si $(a,b,c)\mathcal{R}(a',b',c')$, alors $E(a,b,c)$ et $E(a',b',c')$ ont le même ensemble de solutions.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $E(a,b,c)$ telles que a,b et c sont deux à deux distincts.
5. Donner les équations qui admettent j comme solution.
6. On considère 3 dés cubiques A,B,C

A porte le nombre 1 sur deux faces , j sur deux faces et j^2 sur les deux dernières . Chaque face a même Probabilité d'apparition.

B porte le nombre 1 sur deux faces et j sur quatre faces. Chaque face a même Probabilité d'apparition.

C est pipé. il porte les nombres $1, j$ et j^2 de sorte que les probabilités d'apparition de $1, j$ et j^2 sont Respectivement proportionnelles à $3, 6$ et 1.

On appelle épreuve $\mathscr{E}$ le lancer simultané des 3 dés . Un résultat W de l'épreuve est la lecture des faces supérieures respectives des dés A,B,C

ex : "$W=(a,b,c)$" $\Leftrightarrow$ les dés A,B,C ont respectivement amené a,b,c.

a) Quel est l'univers Ω des possibilités ?

b) Au résultat $W=(a,b,c)$ de $\mathscr{E}$, on associe l'équation $E(a,b,c)$.

Quelle est la probabilité d'obtenir une équation admettant j et j^2 pour racines ?

c) $\alpha)$ On considère la variable aléatoire X définie par :

$X((a,b,c))=1\Leftrightarrow a=b=c$

$$X\left(\left(a,b,c\right)\right)=0 \Leftrightarrow a,b,c \textit{ non égaux tous les trois}$$

On appelle événement "$X=n$" l'ensemble des éléments W de Ω tels que
$X\left(W\right)=n \quad \left(n\in\{0,1\}\right)$

Quelle est la probabilité de l'événement "$X=1$" ?

Remarque : dans la suite du problème , on appellera succès la réalisation de "$X=1$".

β) On répète 3 fois l'épreuve $\mathscr{E}$. Soit Y la variable aléatoire prenant comme valeur le

nombre de succès sur les 3 épreuves.

Donner la loi de probabilité de Y .

Que peut-on dire de cette loi ?

Calculer l'espérance mathématique de Y .

Correction : Problème 1

1. $f(x) = x\left(1 - \dfrac{2}{\ln x}\right)$

a) Ensemble de définition de f :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \quad et \quad \ln x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \quad et \quad x \neq 1\} \\ &=]0,1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\left(1 - \dfrac{2}{\ln x}\right) = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = +\infty$$

2. $\begin{cases} g(x) = f(x) & ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a)

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue à droite de 0.

b)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = 1$$

donc g est dérivable à droite de 0 et on a $g'_d(0) = 1$

c) $g'(x) = \dfrac{\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2}{\ln^2(x)}$

tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	1	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) $g''(x)=\dfrac{2\ln(x)-4}{x.(\ln(x))^3}$

$I\left(e^2,0\right)$ est un point d'inflexion

Branches infinies

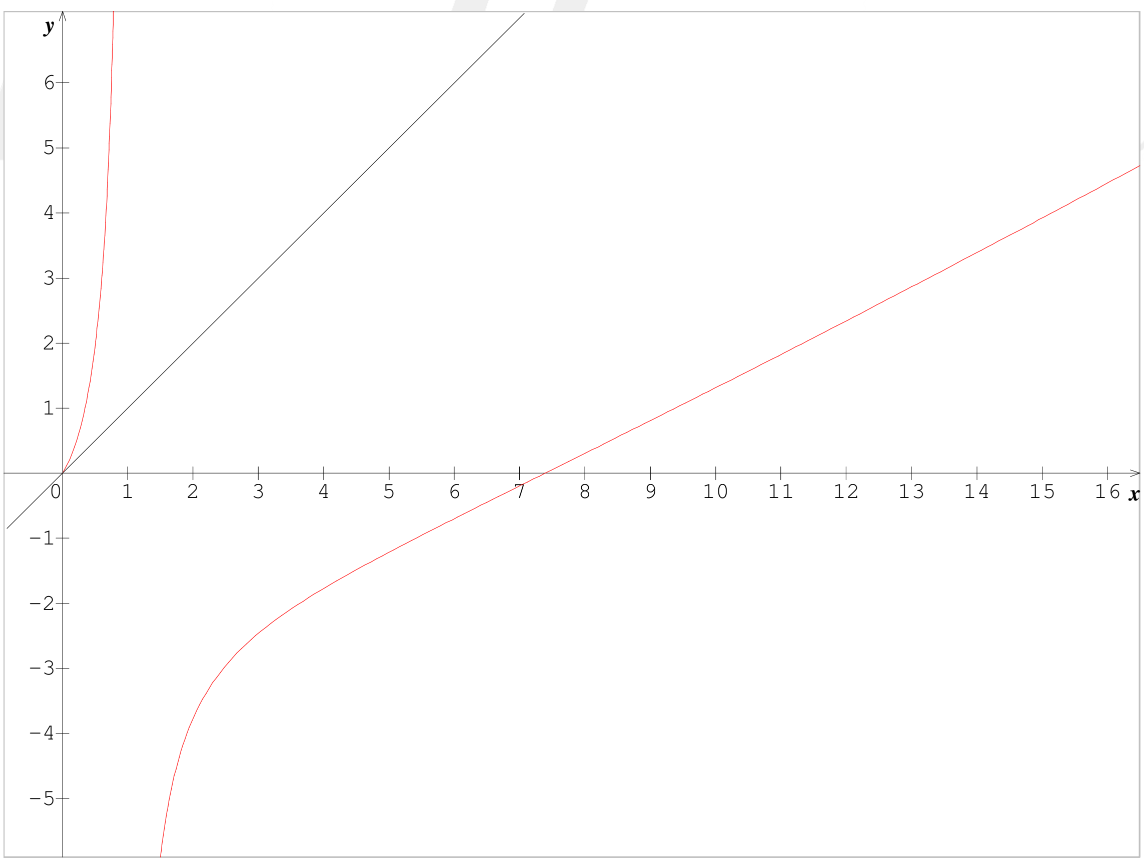
- La droite d'équation $x=1$ est asymptote à (C)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1 \quad et \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\dfrac{\ln x}{x}}=-\infty$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

Représentation graphique :

$$g(0)=0 \quad g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{3}{e} \quad g(e)=-e \quad g\left(e^2\right)=0$$

$$g'_d(0)=1 \quad g'\left(\frac{1}{e}\right)=5 \quad g'(e)=1 \quad g'\left(e^2\right)=\frac{1}{2}$$



3.

$$x\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)+e>0 \quad \Leftrightarrow x\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)>-e$$
$$\Leftrightarrow f(x)>f(e)$$

$$S=]0,1[\cup]e,+\infty[$$

Correction : Problème 2

3. $(a,b,c)\mathcal{R}(a',b',c') \Leftrightarrow \exists u\in U : (a,b,c)=u.(a',b',c')$

$$E(a,b,c): az^2+bz+c=0 \quad \Leftrightarrow uaz^2+ubz+uc=0 : E(a',b',c')$$
$$\Leftrightarrow a'z^2+b'z+c'=0 : E(a',b',c')$$

Donc $E(a,b,c)$ et $E(a',b',c')$ ont le même ensemble de solutions.

4. $E(1,j,j^2)$; $E(j,j^2,1)$; $E(j^2,1,j)$ ont le même ensemble de solutions $S_1=\{1,j^2\}$

$E(1,j^2,j)$; $E(j,1,j^2)$; $E(j^2,j,1)$ ont le même ensemble de solutions $S_2=\{1,j\}$

5. on a d'après 4. $E(1,j^2,j)$; $E(j,1,j^2)$ et $E(j^2,j,1)$ admettent j comme solution.

Il faut envisager le cas où $E(a,b,c)$ avec (a,b,c) non tous distincts

Parmi ces équations ; seules $E(1,1,1)$; $E(j,j,j)$ et $E(j^2,j^2,j^2)$ admettent j pour solution

Donc les équations qui admettent j pour solution sont : $E(1,j^2,j)$; $E(j,1,j^2)$; $E(j^2,j,1)$; $E(1,1,1)$; $E(j,j,j)$ et $E(j^2,j^2,j^2)$

6. a) $\Omega=\{1,j,j^2\}\times\{1,j\}\times\{1,j,j^2\}$

b) les équations qui admettent j et j^2 pour solutions sont $E(1,1,1)$ et $E(j,j,j)$

A : événement obtenir une équation admettant j et j^2 pour solutions.

$$p(A)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\right)=\boxed{\frac{1}{6}}$$

c) $\alpha)$ $p(X=1)=\frac{1}{6}$

$\beta)$ $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{6}\right)$; loi de probabilité de Y :

k	0	1	2	3
$p(Y=k)$	$C_3^0\left(\dfrac{5}{6}\right)^3$	$C_3^1\left(\dfrac{5}{6}\right)^2.\dfrac{1}{6}$	$C_3^2\left(\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$	$C_3^3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$

Espérance mathématique de Y : $E(Y) = 3\times\dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

つづく