~ Examen Vintage ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Juin 1974

Problème 1 :

A. Soit la fonction f de la variable réelle x , définie par : $f(x) = Arc\cos\left(1-x^2\right)$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Etudier la parité de cette fonction . Dans la suite du problème, on se limitera à $x \geq 0$.

2. a) Vérifier que f est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0,\sqrt{2}\right[$.

b) En posant $t = Arc\cos\left(1-x^2\right)$. Démontrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{2}$

En déduire que f est dérivable à droite de 0.

3. Etudier les variations de f pour $x \in \left[0,\sqrt{2}\right]$ et construire la courbe représentative (C)

de f , Dans cet intervalle . (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\ x>\sqrt{2}}} \dfrac{f(x)-f\left(\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}} = +\infty$)

B. Soit la fonction g de la variable réelle x , définie par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}} ; x \geq 0$

1. Etudier les variations de g et tracer sa représentation graphique (Γ) dans un repère orthonormé.

2. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses , et les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$.

Problème 2 :

Soient dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = x_1 + iy_1$;
$z_2 = x_2 + iy_2$
x_1, x_2, y_1, y_2 étant des nombres réels.

1. On suppose que les affixes z_1 et z_2 sont liées par la relation $z_1.z_2 = i$

   a) Quelle est la relation qui lie les modules ρ_1 et ρ_2 de z_1 et z_2 ?

b) Quelle est la relation qui lie les arguments θ_1 et θ_2 de z_1 et z_2 ?
c) Exprimer x_2 et y_2 en fonction de x_1 et y_1.
d) Déterminer z_1 et z_2 sachant que , de plus , $z_1 = z_2$

2. P désigne le plan complexe, rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ et $P^* = P - \{O\}$

A est l'image du complexe 1

Soit φ l'application de P^* vers P qui à tout m de P^*, d'affixe z , associe le point M ,

d'affixe Z , tel que : $Z.z = i$.

a) Soit la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$. Quelle est l'image par φ de cette droite ? (On donnera l'équation de cette image , et on précisera la nature)
b) Soit Γ le cercle de centre A et de rayon 1. Quelle est l'image par φ de $\Gamma - \{O\}$

Correction : Problème 1

A. 1. $f(x) = Arc\cos(1-x^2)$

- $f(x)$ est définie si et seulement si :

$$-1 \le 1-x^2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 1-x^2 \\ et \\ 1-x^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ et \\ -x^2 \le 0 \quad toujours \quad vérifié \end{cases}$$

D'où : $D_f = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

-
    - $\forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] : -x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$
    - $\forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] : f(-x) = Arc\cos\left(1-(-x)^2\right) = Arc\cos(1-x^2) = f(x)$

    donc f est paire.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{Arc\cos(1-x^2)}{x}$

Posons $t = Arc\cos(1-x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = \cos t \\ 0 < t < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1-\cos t} \quad (\cos x > 0) \\ 0 < t < \pi \end{cases}$

Lorsque $x \to 0^+$ alors : $t \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2.\frac{t}{2}}{\sqrt{2}.\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

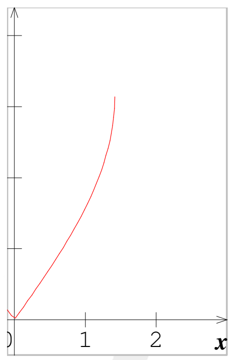
Donc f est dérivable à droite de 0 et on a $f'_d(0) = \sqrt{2}$.

3. $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$; tableau de variation de f :

x	0		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$\sqrt{2}$	$+$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	Π

Représentation graphique de f :

$f''(x)=\dfrac{2x}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$; $\left(\forall x\in \left]0,\sqrt{2}\right[\right); f''(x)>0$ donc (C) est convexe

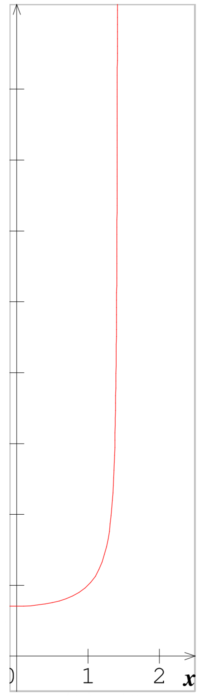


B. 1. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}; x\geq 0$

- Ensemble de définition de g : $D_g=\left[0,\sqrt{2}\right[$
- Limites aux bornes de D_g : $g(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} g(x)=+\infty$
- $g'(x)=\dfrac{x}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$
- Tableau de variation de g :

x	0		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Représentation graphique de g :



2. $A=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}f'(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}f(x)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

Correction : Problème 2

1. $z_1=\rho_1 e^{i\theta_1}$; $z_2=\rho_2 e^{i\theta_2}$

a-b)

$$z_1z_2=i \iff \rho_1 e^{i\theta_1}.\rho_2 e^{i\theta_2}=1.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff \rho_1\rho_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}=1.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff \begin{cases}\rho_1\rho_2=1\\ \theta_1+\theta_2\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\rho_1\rho_2=1\\ \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

c) $z_1=x_1+iy_1$; $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1z_2=i \iff z_2=\frac{i}{z_1}=\frac{i}{x_1+iy_1}=\frac{y_1+ix_1}{x_1^2+y_1^2}$$

$$\iff \begin{cases}x_2=\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\\ y_2=\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\end{cases}$$

d)

$$z_1=z_2 \iff \begin{cases}\rho_1^2=1;\quad \rho_1>0\\ 2\theta_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\rho_1=1\\ \theta_1=\frac{\pi}{4}+k\pi;\quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

$$z_1=1e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad z_1=1e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.

$$\begin{array}{llll}\varphi & :P^* & \to & P\\ & m(z) & \mapsto & M(Z)\end{array} \quad \text{telle que} \quad Z.z=i$$

$$m(x,y) \mapsto M(X,Y) \text{ telle que : } \begin{cases} X = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{Y}{X^2+Y^2} \\ y = \dfrac{X}{X^2+Y^2} \end{cases}$$

On a aussi $\begin{cases} (x,y) \neq (0,0) \\ \quad et \qquad\qquad car \quad z.Z \neq 0 \\ (X,Y) \neq (0,0) \end{cases}$

a)

$$x = \frac{1}{4} \qquad \Leftrightarrow \frac{Y}{X^2+Y^2} = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow X^2+Y^2-4Y = 0$$
$$\Leftrightarrow X^2+(Y-2)^2 = 4 avec \quad (X,Y) \neq (0,0)$$
$$(X-0)^2+(Y-2)^2 = 2^2 avec \quad (X,Y) \neq (0,0)$$

L'image de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ est le cercle de centre $\Omega(0,2)$ et de rayon 2 privé de O .

b)

$\Gamma^* : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad avec \quad (x,y) \neq (0,0) \Leftrightarrow$

$\Gamma^* : x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad avec \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$\varphi(\Gamma^*) : \left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2 + \left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2 - \frac{2Y}{X^2+Y^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow (X^2+Y^2)(1-2Y) = 0$$
$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{2} \quad car \quad (X,Y) \neq (0,0)$$

L'image de Γ^* est la droite d'équation $Y = \dfrac{1}{2}$ $\quad \left(\Gamma^* = \Gamma - \{O\}\right)$

つづく