# الثانية علوم تجريبية

# تصحيح الامتحان الوطني 2017

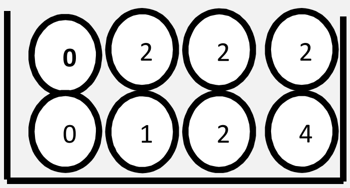
## التمرين الأول : ( 3 ن )

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، المستوى $(P)$ المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{n}(1,0,-1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة $(S)$ التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

| | |
|---|---|
| **1)** أ- بين أن $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$ | 0,5 |
| ب- بين أن المستوى $(P)$ مماس للفلكة $(S)$ و تحقق من أن $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس | 0,75 |
| **2)** أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(\Delta)$ المار من النقطة $A$ و العمودي على المستوى $(P)$ | 0,25 |
| ب- بين أن المستقيم $(\Delta)$ مماس للفلكة $(S)$ في النقطة $C(1,1,0)$ | 0,75 |
| **3)** بين أن $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ و استنتج مساحة المثلث $OCB$ | 0,75 |

## التمرين الثاني : ( 3 ن )

يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه .
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق




| | |
|---|---|
| **1)** نعتبر الحدث $A$ : "من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد $0$ " و الحدث $B$ : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي $8$ " بين أن $p(A)=\dfrac{5}{14}$ و أن $p(B)=\dfrac{1}{7}$ | 1,5 |
| **2)** ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملعا الكرات الثلاث المسحوبة . | |
| أ- بين أن $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$ | 0,5 |
| ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي $X$ أتمم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك مغللا أجوبتك | 1 |

| $x_i$ | $0$ | $4$ | $8$ | $16$ |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | | | | $\dfrac{3}{28}$ |

## التمرين الثالث : ( 3 ن )

نعتبر العددين العقديين $a$ و $b$ بحيث $a=\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

1) أ- تحقق من أن $b=\left(1+i\right)a$ — $0,25$

ب- استنتج أن $\left|b\right|=2\sqrt{2}$ و أن $\arg\left(b\right)\equiv\frac{5\pi}{12}\left[2\pi\right]$ — $0,5$

ج- استنتج مما سبق أن $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ — $0,5$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين $A$ و $B$ اللذين لحقاهما على التوالي هما $a$ و $b$ و النقطة $C$ التي لحقها $c$ بحيث $c=-1+i\sqrt{3}$

أ- تحقق من أن $c=ia$ و استنتج أن $OA=OC$ و أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ — $0,75$

ب- بين أن النقطة $B$ هي صورة النقطة $A$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ — $0,5$

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع — $0,5$

## المسألة : ( 11 ن )

**I.** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $g\left(x\right)=x^{2}+x-2+2\ln x$

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

1) تحقق من أن $g\left(1\right)=0$ — $0,25$

2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة $g$ جانبه : — $1$

بين أن $g\left(x\right)\leq 0$ لكل $x$ من المجال $\left]0,1\right]$

و أن $g\left(x\right)\geq 0$ لكل $x$ من المجال $\left[1,+\infty\right[$

**II.** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $f\left(x\right)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$

و ليكن $\left(C\right)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f\left(x\right)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة — $0,5$

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ — $0,25$

ب- بين أن المنحنى $\left(C\right)$ يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $\left(D\right)$ الذي معادلته $y=x$ — $0,75$

3) أ- بين أن $f'\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{x^{2}}$ لكل $x$ من المجال $\left]0,+\infty\right[$ — $1$

ب- بين أن الدالة $f$ تناقصية على المجال $\left]0,1\right]$ و تزايدية على المجال $\left[1,+\infty\right[$ — $0,75$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ — $0,25$

| | |
|---|---|
| 4) أ- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x = 0$ | 0,5 |
| ب- استنتج أن المنحنى $(C)$ يقطع المستقيم $(D)$ في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما | 0,5 |
| ج- بين أن $x \leq f(x)$ لكل $x$ من المجال $[1,2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(D)$ على $[1,2]$ | 0,75 |
| 5) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم $(D)$ و المنحنى $(C)$ ( نقبل أن للمنحنى $(C)$ نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2,4$ و $2,5$ ) | 1 |
| 6) أ- بين أن $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ | 0,5 |
| ب- بين أن الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \dfrac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$ | 0,25 |
| ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx = (1-\ln 2)^2$ | 0,5 |
| د- أحسب ب $cm^2$ ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C)$ و المستقيم $(D)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ | 0,5 |
| III. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | |
| 1) بين بالترجع أن $1 \leq u_n \leq 2$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | 0,5 |
| 2) بين أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية ( يمكنك استعمال نتيجة السؤال $II$ (4 ج- ) | 0,5 |
| 3) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها. | 0,75 |

## تصحيح التمرين الأول

1) أ- لدينا $\vec{n}(1,0,-1)$ متجهة منظمية للمستوى $(P)$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$ تكتب على شكل : $(1)x+(0)y+(-1)z+d=0$

و لدينا : $A(0,1,1)\in(P)$

إذن : $(1)(0)+(0)(1)+(-1)(1)+d=0$ و منه $d=1$

و بالتالي : $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$

ب-

✓ $$d(\Omega,(P))=\frac{|(0)-(-1)+1|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

✓ بما أن $d(\Omega,(P))=R$ ( $R$ شعاع الفلكة $(S)$ )

فإن المستوى $(P)$ مماس للفلكة $(S)$

- لدينا : $\Omega B=\sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$ إذن $B\in(S)$
- و لدينا : $(-1)-(0)+1=0$ إذن $B\in(P)$

و منه $B\in(P)\cap(S)$

و بما أن $(P)$ مماس للفلكة $(S)$ فإن نقطة التماس هي النقطة $B$

2) أ-

✓ لدينا : $\vec{n}(1,0,-1)$ متجهة منظمية للمستوى $(P)$ و $(\Delta)\perp(P)$

إذن $\vec{n}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم $(\Delta)$

✓ و لدينا : $A(0,1,1)\in(\Delta)$

وبالتالي تمثيل بارامتري للمستقيم $(\Delta)$ :

$$\begin{cases} x=(0)+t(1)=t \\ y=(1)+t(0)=1 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=(1)+t(-1)=1-t \end{cases}$$

ب-

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S) \iff \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

بعد التعويض نجد : $2t^2-4t+2=0$ إذن $t^2-2t+1=0$ إذن $(t-1)^2=0$ و منه $t=1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1-(1) = 0 \end{cases}$$

و بالتالي : المستقيم $(\Delta)$ مماس للفلكة $(S)$ في النقطة $C(1,1,0)$

3)

- ✓ لدينا : $\overrightarrow{OC}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{OB}(-1,1,0)$

إذن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= 0.\vec{i} - 0.\vec{j} + 2.\vec{k} \\ &= 2\vec{k}\end{aligned}$$

- ✓ مساحة المثلث $OCB$ :

$$S_{OCB} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\vec{k}\right\| = 1$$

## تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق "

ليكن $\Omega$ كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_8^3 = 56$

1)

- ✓ $A$ : "من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0 "

$$\bar{0},\bar{0},\bar{0}$$

$$cardA = C_6^3 = 20$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

- ✓ $B$ : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 "

$1,2,4$ أو $2,2,2$

$$cardB = C_4^3 + C_1^1C_4^1C_1^1 = 4+4 = 8$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\,\Omega} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2) أ-

$$X=16 \rightarrow 2,2,4$$

$$p(X=16)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{56}=\frac{6\times 1}{56}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

ب-

✓ طريقة 1:

$$X=0 \rightarrow \begin{cases}0,0,\overline{0}\\0,\overline{0},\overline{0}\end{cases}$$

$$card(X=0)=C_2^2\times C_6^1+C_2^1\times C_6^1=36$$

$$p(X=0)=\frac{card(X=0)}{card\,\Omega}=\frac{36}{56}=\frac{18}{28}$$

طريقة 2 :

$$p(X=0)=p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}=\frac{18}{28}$$

✓ $X=4 \rightarrow 1,2,2$

$$p(X=4)=\frac{C_1^1\times C_4^2}{56}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

✓ $X=8 \rightarrow 2,2,2$ أو $1,2,4$

$$p(X=8)=p(B)=\frac{1}{7}=\frac{4}{28}$$

✓ و حسب نتيجة السؤال 2) أ- ) : $p(X=16)=\frac{3}{28}$

قانون احتمال $X$ :

| $x_i$ | 0 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{18}{28}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{4}{28}$ | $\frac{3}{28}$ |

## تصحيح التمرين الثالث

1) أ-

$$\begin{aligned}(1+i).a &= (1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)\\ &= \sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\\ &= \left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\\ &\qquad b\end{aligned}$$

ب- الشكل المثلثي للعدد $a$ : $a=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

الشكل المثلثي للعدد $1+i$ : $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

✓

$$\begin{aligned}|b| &= |(1+i).a|\\ &= |(1+i)|\times|a|\\ &= \sqrt{2}\times 2 = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned}\arg b &\equiv \arg\left((1+i).a\right)[2\pi]\\ &\equiv \arg(1+i)+\arg(a)[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}[2\pi]\\ &\equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]\end{aligned}$$

ج- لدينا : $b=\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

و لدينا كذلك : $b=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\,2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

إذن : $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-1$

إذن : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

و منه : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) أ-

✓

$$\begin{aligned} ia &= i\left(\sqrt{3}+i\right) \\ &= i\sqrt{3}+i^2 \\ &= -1+i\sqrt{3} \\ &= c \end{aligned}$$

✓ لدينا $c=ia$

إذن $\frac{c}{a}=i$

إذن $\frac{c}{a}=1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

- لدينا : $\left|\frac{c}{a}\right|=1$

إذن : $|c|=|a|$

إذن : $|c-0|=|a-0|$

و منه : $OC=OA$

- و لدينا : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن : $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ب- لدينا :

$$b = \sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$$
$$b = \sqrt{3}-1+\sqrt{3}i+i$$
$$b = \sqrt{3}+i-1+\sqrt{3}i$$
$$b = a+c$$
$$b = a+c-0$$
$$b = a+z_{\overrightarrow{OC}}$$

إذن $B$ هي صورة النقطة $A$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$

ج-

- ✓ لدينا : $B$ هي صورة النقطة $A$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ إذن $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$
  ومنه الرباعي $OABC$ متوازي الأضلاع
- ✓ و بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ فإن الرباعي $OABC$ يصبح مستطيل
- ✓ و بما أن $OC=OA$ فإن الرباعي $OABC$ يصبح مربع

## تصحيح المسألة

.I

1) $g(1)=(1)^2+1-2+2\ln(1)=1+1-2+0=0$

2)

- ✓ على المجال $]0,1]$ : لدينا : $0<x\leq 1$ و الدالة $g$ تزايدية
  إذن : $g(x)\leq g(1)$
  و منه : $g(x)\leq 0$
- ✓ على المجال $[1,+\infty[$ : لدينا : $x\geq 1$ و الدالة $g$ تزايدية
  إذن : $g(x)\geq g(1)$
  و منه : $g(x)\geq 0$

.II

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1-\dfrac{2}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty \end{cases}$

2) أ-

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = +\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

ب-

✓ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

✓ انحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 1$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

✓ لنحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = +\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

وبالتالي : المنحنى $(C)$ يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = x$

3) أ- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ليكن $x \in ]0,+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)' \\ &= 1+\left(1-\frac{2}{x}\right)'\ln x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln'(x) \\ &= 1+\frac{2}{x^2}\ln x+\left(1-\frac{2}{x}\right).\frac{1}{x} \\ &= 1+\frac{2\ln x}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^2+2\ln x+x-2}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$

ب- ليكن $x \in ]0,+\infty[$ :

لدينا $x^2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

و حسب نتيجة السؤال $I)2($ لدينا :

- ✓ على المجال $]0,1]$ : $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$ و منه $f$ تناقصية
- ✓ على المجال $[1,+\infty[$ : $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$ و منه $f$ تزايدية

ج- جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

4) أ- لنحل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$

لدينا :

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{x}\right) = 0 \text{ أو } \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = 0 \text{ أو } \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } x = 1$$

إذن : $S = \{1,2\}$

ب- لنحدد تقاطع $(D)$ و $(C)$

لنحل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x) = x$

لدينا :

$$f(x) = x$$
$$x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = x$$
$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$$
$$x = 1 \text{ أو } x = 2$$

إذن المنحنى $(C)$ يقطع المستقيم $(D)$ في النقطتين $A(1,1)$ و $B(2,2)$

ج- ليكن $x \in [1,2]$ :

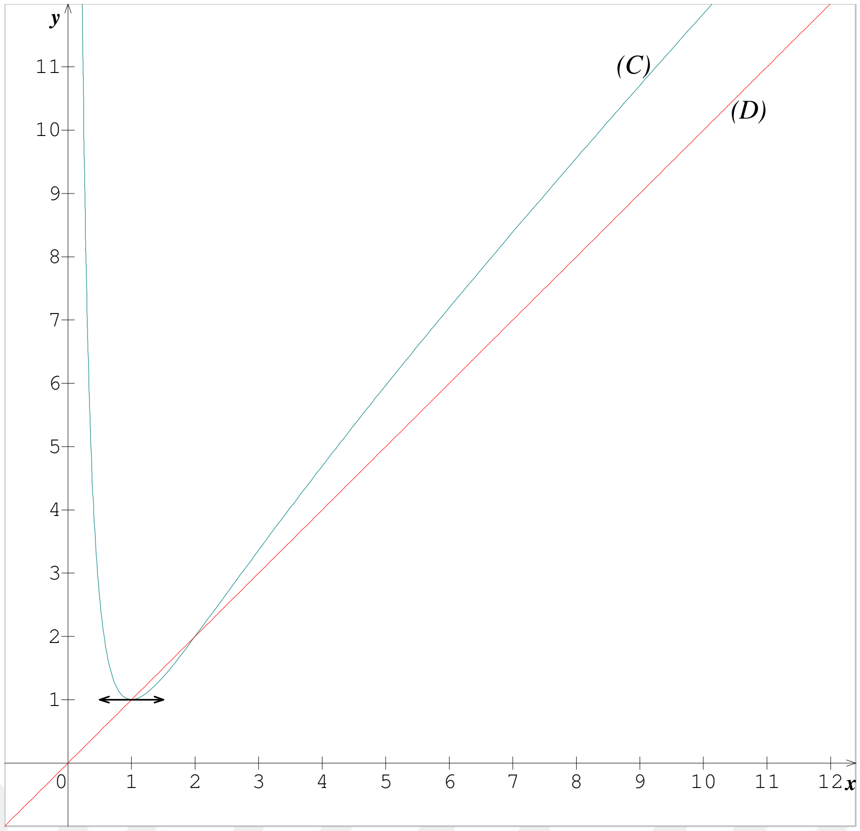
$$f(x) - x = \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = \frac{x-2}{x}\ln x$$

لدينا على المجال $[1,2]$ : $x > 0$ و $\ln x \geq 0$ و $x - 2 \leq 0$

إذن $\frac{x-2}{x}\ln x \leq 0$ و منه $f(x) - x \leq 0$ لكل $x$ من المجال $[1,2]$

و بالتالي : المنحنى $(C)$ يوجد تحت المستقيم $(D)$ على المجال $[1,2]$

5)




6) أ-

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\times \ln x dx$$

$$= \int_1^2 \ln'(x)\ln(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

ب-

✓ لدينا الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

✓ ليكن $]0,+\infty[ \ni x$ :

لدينا: $H'(x) = (2\ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1 = h(x)$

إذن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $H'(x) = h(x)$

و بالتالي : الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0,+\infty[$

ج-

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{2}{x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = 2\ln(x) - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx &= \left[(2\ln x - x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{2\ln x - x}{x}\right)dx \\ &= (2\ln 2 - 2)\ln 2 - 0 - \left(2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx - \int_1^2 1dx\right) \\ &= (2\ln 2 - 2)\ln 2 - \left(2\times\frac{1}{2}(\ln 2)^2 - [x]_1^2\right) \\ &= (2\ln 2 - 2)\ln 2 - \left((\ln 2)^2 - (2-1)\right) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 \\ &= 1 - 2\ln 2 + (\ln 2)^2 \\ &= (1 - \ln 2)^2 \end{aligned}$$

ج- على المجال $[1,2]$

لدينا : $f(x) - x \le 0$

إذن : $|f(x) - x| = x - f(x)$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 |f(x) - x| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \int_1^2 (x - f(x))dx.1cm.1cm \\ &= \int_1^2 -\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x dx.cm^2 \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx.cm^2 \\ &= (1 - \ln 2)^2.cm^2 \end{aligned}$$

III.

1)

- ✓ من أجل $n=0$ :
  لدينا $u_0=\sqrt{3}$
  إذن : $1\leq u_0\leq 2$
- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$ :
  - نفترض أن $1\leq u_n\leq 2$
  - و نبين أن $1\leq u_{n+1}\leq 2$ ؟
  
  لدينا حسب الافتراض $1\leq u_n\leq 2$ و لدينا $f$ تزايدية على المجال $[1,2]$
  
  إذن : $f(1)\leq f(u_n)\leq f(2)$
  
  و منه : $1\leq u_{n+1}\leq 2$
- ✓ نستنتج أن $1\leq u_n\leq 2$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا حسب نتيجة السؤال $II$ ) 4 ) ج- ) : $f(x)\leq x$ لكل $x$ من المجال $[1,2]$

إذن : $f(u_n)\leq u_n$ ( $u_n\in[1,2]$ )

و منه $u_{n+1}\leq u_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية $(u_n)$ تناقصية

3)

- ✓ بما أن $(u_n)$ تناقصية و مصغورة ( بالعدد 1 ) فإن $(u_n)$ متقاربة
- ✓ لدينا : $\begin{cases} u_0\in I=[1,2] \\ u_{n+1}=f(u_n);n\in\mathbb{N}\end{cases}$
  - الدالة $f$ متصلة على المجال $[1,2]$
  - $f(I)=f([1,2])=[f(1),f(2)]=[1,2]=I$
  - $(u_n)$ متقاربة
  
  إذن نهاية $(u_n)$ هي حل للمعادلة $f(x)=x$
  
  إذن $x=2$ أو $x=1$
  
  و بما أن $(u_n)$ تناقصية فإن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n\leq u_0$
  
  إذن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n\leq\sqrt{3}$

و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \sqrt{3}$

و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ .

つづく