الثانية إقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني 2015

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+1 \quad ; n\in\mathbb{N}\end{cases}$	
1. أحسب u_1 و u_2	0,5
2. بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n<\frac{5}{4}$	0,5
3. أ. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{-4}{5}\left(u_n-\frac{5}{4}\right)$	0,5
ب. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية وأنها متقاربة	0,75
4. نضع $v_n=u_n-\frac{5}{4}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ. أحسب v_0	0,25
ب. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$	0,5
ج. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{1}{4}\left(5-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$	1
د. أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	0,5

التمرين الثاني : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{2}{x}+\ln x$	
و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$	
1. أ. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	0,75
ب. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=+\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .	1,5

2. أ. تحقق أن $f(x)=x+\dfrac{2+x\ln x}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ — $0,5$

ب. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة . — 1

3. أ. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ — $0,5$

ب. تحقق أن $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ و أدرس إشارة التعبير $(x-1)(x+2)$ على كل من المجالين $]0,1]$ و $[1,+\infty[$ — 1

ج. استنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ و تناقصية على المجال $]0,1]$ — $0,5$

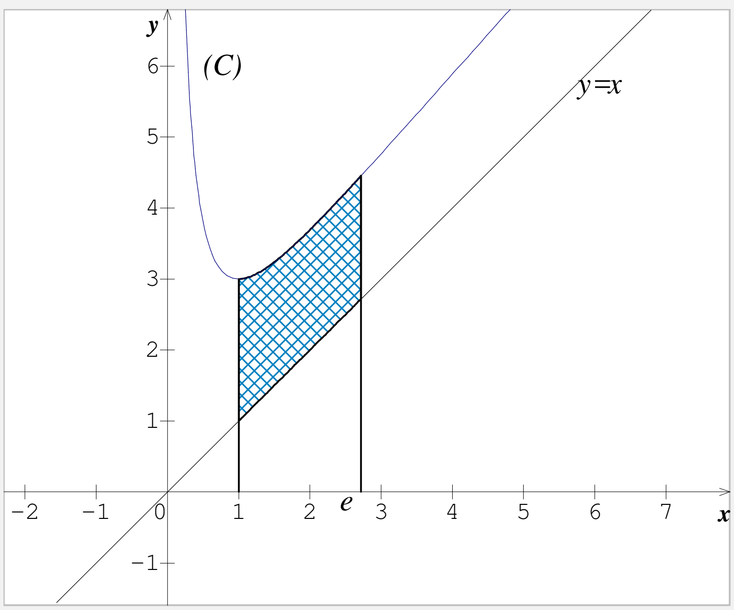
د. ضع جدول تغيرات الدالة f — $0,5$

4. أ. تحقق أن $f''(x)=\dfrac{4-x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$ — $0,75$

ب. أدرس إشارة $f''(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن (C) يقبل نقطة انعطاف I ينبغي تحديد زوج إحداثيتيها. — $1,5$

5. أ. باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^e \ln(x)\,dx=1$ — 1

ب. استنتج مساحة الحيز المخدش في الشكل أسفله : — $1,5$



التمرين الثالث : ($4,5$ ن) (تقدم جميع نتائج هذا التمرين على شكل كسر)

يحتوي كيس على ثمان كرات غير قابلة للتمييز باللمس ، ثلاث منها خضراء و خمس منها حمراء .
نسحب من الكيس و في آن واحد كرتين .

0,5	**1. بين أن عدد حالات السحب الممكنة هو 28**
	2. نعتبر الحدثين A و B التاليين : A **" الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون "** B **" الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون "**
1	**أ. بين أن** $p(A)=\frac{13}{28}$
1	**ب. أحسب احتمال الحدث** B
	3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الخضراء المسحوبة .
0,5	**أ. بين أن** $p(X=0)=\frac{10}{28}$
1	**ب. أتمم ملء الجدول أسفله بعد نقله على ورقة تحريرك معللا جوابك .**
0,5	**ج. أحسب** $E(X)$ **الأمل الرياضي للمتغير العشوائي** X

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{10}{28}$		

تصحيح التمرين الأول

.1 $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 1 = \frac{1}{5}(1) + 1 = \frac{6}{5}$

$u_2 = \frac{1}{5}u_1 + 1 = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right) + 1 = \frac{6}{25} + 1 = \frac{31}{25}$

.2

- ✓ من أجل $n = 0$

لدينا : $u_0 = 1$

إذن : $u_0 < \frac{5}{4}$

- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

  - نفترض أن : $u_n < \frac{5}{4}$
  - و نبين أن : $u_{n+1} < \frac{5}{4}$ ؟

لدينا حسب الافتراض $u_n < \frac{5}{4}$

إذن $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{5} \times \frac{5}{4}$ إذن : $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{4}$

إذن $\frac{1}{5}u_n + 1 < \frac{1}{4} + 1$

إذن : $u_{n+1} < \frac{5}{4}$

- ✓ نستنتج أن : **لكل n من $\mathbb{N}$:** $u_n < \frac{5}{4}$

.3 أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 1 - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + 1 = \frac{-4}{5}u_n + 1 = \frac{-4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right)$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - u_n = \frac{-4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right)$

ب-

- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_n < \frac{5}{4}$

إذن : $u_n - \frac{5}{4} < 0$

إذن : $\frac{-4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right) > 0$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$

و منه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية

- ✓ بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية و مكبورة (بالعدد $\frac{5}{4}$) فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

4. أ- $v_0 = u_0 - \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{4} = \frac{-1}{4}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{4} = \frac{1}{5}u_n + 1 - \frac{5}{4} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{5}.v_n$

إذن : : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{5}.v_n$

و منه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

ج-

- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_n = v_0.q^n$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n = \frac{-1}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

- ✓ لدينا : $v_n = u_n - \frac{5}{4}$

إذن $u_n = v_n + \frac{5}{4}$

إذن : $u_n = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{4}$

و منه $u_n = \frac{1}{4}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

د- لدينا : $-1 < \frac{1}{5} < 1$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$

و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(5-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=\frac{5}{4}$

و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{5}{4}$

تصحيح التمرين الثاني

.1 أ. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x+\frac{2}{x}+\ln x=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$

ب.

✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}=1$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\end{cases}$

✓ $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\ln x=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$

✓ (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

.2 أ. ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا : $f(x)=x+\frac{2}{x}+\ln x=x+\frac{2+x\ln x}{x}$

إذن : $f(x)=x+\dfrac{2+x\ln x}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب.

✓ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x+\dfrac{2+x\ln x}{x}=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0^+\end{cases}$

✓ التأويل الهندسي : (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

3. أ. ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا : $f'(x)=\left(x+\dfrac{2}{x}+\ln x\right)'=1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$

إذن : $f'(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب.

✓ ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا : $(x-1)(x+2)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$

إذن : $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

✓

- <u>على المجال</u> $[1,+\infty[$: لدينا $x\geq 1$

  إذن : $x-1\geq 0$ و $x+2\geq 3>0$

  و منه : $(x-1)(x+2)\geq 0$

- <u>على المجال</u> $]0,1]$: لدينا $0<x\leq 1$

  إذن : $x-1\leq 0$ و $0<2<x+2$

  و منه $(x-1)(x+2)\leq 0$

ج. ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا : $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2}$

بما أن $x^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)(x+2)$

و حسب نتيجة السؤال 3.ب. لدينا :

- على المجال $]1,+\infty[$: $(x-1)(x+2)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$
- على المجال $]0,1[$: $(x-1)(x+2)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$

و بالتالي : الدالة f تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ و تناقصية على المجال $]0,1[$

د. جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ. الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$:

ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)' \\
&= \frac{\left(x^2+x-2\right)'\times x^2-\left(x^2+x-2\right)\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} \\
&= \frac{(2x+1).x^2-\left(x^2+x-2\right).2x}{x^4} \\
&= \frac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2+4x}{x^4} \\
&= \frac{4x-x^2}{x^4} \\
&= \frac{4-x}{x^3}
\end{aligned}$$

إذن : $f''(x)=\dfrac{4-x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب.

✓ ليكن x من $]0,+\infty[$:

لدينا : $x^3 > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $4-x$

x	0		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

✓ بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 4 فإن النقطة $I\left(4, \dfrac{9}{2}+\ln(4)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

.5 أ.

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x)dx &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times x dx \\ &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx \\ &= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e \\ &= (e-0)-(e-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x)-x|dx.(UA) \\ &= \int_1^e (f(x)-x)dx.(UA) \\ &= \int_1^e \left(\frac{2}{x}+\ln x\right)dx.(UA) \\ &= \left(\int_1^e \frac{2}{x}dx + \int_1^e \ln x dx\right).(UA) \\ &= \left([2\ln x]_1^e + 1\right).(UA) \\ &= ((2-0)+1).(UA) \\ &= 3.(UA) \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الثالث

1. التجربة " سحب كرتين في آن واحد من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

$$card\,\Omega = C_8^2 = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$$

2. أ. A " الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون "

VV أو RR

$$cardA = C_5^2 + C_3^2 = 10+3 = 13$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{13}{28}$$

ب. B " الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون "

$$p(B) = p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$$

<u>طريقة أخرى :</u>

B " الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون "

R و V

$$cardB = C_5^1 \times C_3^1 = 5\times 3 = 15$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\,\Omega} = \frac{15}{28}$$

3. أ. $X = 0 \leftarrow \overline{V}, \overline{V}$

$$p(X=0) = \frac{C_5^2}{28} = \frac{10}{28}$$

ب. $X = 1 \leftarrow V, \overline{V}$

$$p(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_3^1}{28} = \frac{5\times 3}{28} = \frac{15}{28}$$

$X = 2 \leftarrow V, V$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2}{28} = \frac{3}{28}$$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

ج. الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{10}{28}\right)+\left(1\times\frac{15}{28}\right)+\left(2\times\frac{3}{28}\right)=\frac{21}{28}$$

つづく